東大2020 [1] $a, b, c, p \in \mathbb{R}$.

$\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2+bx+c>0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid bx^2+cx+a>0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid cx^2+ax+b>0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x>p\}$

(1) $a, b, c \geqq 0$ を示せ. (2) $abc=0$を示せ (3) $p=0$を示せ

$A=\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2+bx+c>0\}$
$B=\{x \in \mathbb{R} \mid bx^2+cx+a>0\}$
$C=\{x \in \mathbb{R} \mid cx^2+ax+b>0\}$
$P=\{x \in \mathbb{R} \mid x>p\}$.

(1) $a<0$ と仮定する. このとき,

$\lim_{x \to \infty} ax^2+bx+c = -\infty$ より.

十分大きい実数x'について $x \geqq x'$ なら $x \notin A$ となり $x \in P$に矛盾. よって $a \geqq 0$. b, cについても同様.

(2) $a, b, c>0$ としたとき,

$\lim_{x \to -\infty} ax^2+bx+c=+\infty$
$\lim_{x \to -\infty} bx^2+cx+a=+\infty$ より十分$-\infty$に近い$x' \in \mathbb{R}$について
$\lim_{x \to -\infty} cx^2+ax+b=+\infty$

$x \leqq x'$なら. $x \in A \cap B \cap C$となる.

これは$x \notin P$に矛盾する.

(3) (2)までより. $a=0$としても一般性は失われない. このとき,

$A=\{x \in \mathbb{R} \mid bx+c>0\}$
$B=\{x \in \mathbb{R} \mid x(bx+c)>0\}$
$C=\{x \in \mathbb{R} \mid bx^2+c>0\}$

このとき, $(b, c)=(0,0)$ なら.
$A=B=C=\mathbb{R}$となって不適. よって
$(b, c) \neq (0,0)$. このとき, $C=\mathbb{R}$.

よって
$A \cap B \cap C = A \cap B$ ここで $p=0$として.

$A \cap B = P$ を示す

① $x \in P$と仮定. このとき $x>0$.

ここで, $b, c>0$より $bx+c>0$ より
$x \in A$. また,
$x>0$, $bx+c>0$ より
$x(bx+c)>0$. よって $x \in B$.
より $x \in A \cap B$
$\therefore P \subset A \cap B$

② $x \in A \cap B$と仮定. このとき, $x \notin P$とすると.
$x \leqq 0$, $bx+c>0$, より
$x(bx+c) \leqq 0$ このとき,
$x \notin B$となって矛盾する. よって $x \in P$.

つまり $A \cap B \subset P$.

①,②より $A \cap B = P$ となる □

東大2020 [2] $S(\triangle ABC)=1$ $X\in\mathbb{R}^2$ について
$2 \leq S(\triangle ABX)+S(\triangle BCX)+S(\triangle CAX) \leq 3$ となるXのはんいの面積

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AX}=x\vec{a}+y\vec{b}$ のとき $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$S(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ より

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=4$

ここで、
$|p\vec{a}+q\vec{b}|^2|r\vec{a}+s\vec{b}|^2-((p\vec{a}+q\vec{b})\cdot(r\vec{a}+s\vec{b}))^2$

$=(p^2|\vec{a}|^2+q^2|\vec{b}|^2+2pq\,\vec{a}\cdot\vec{b})(r^2|\vec{a}|^2+s^2|\vec{b}|^2+2rs\,\vec{a}\cdot\vec{b})$
$\quad-(pr|\vec{a}|^2+rq\,\vec{a}\cdot\vec{b}+ps\,\vec{a}\cdot\vec{b}+qs|\vec{b}|^2)^2$

$=p^2r^2|\vec{a}|^4+(p^2s^2+r^2q^2)|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2+q^2s^2|\vec{b}|^4+4pqrs(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+(2q^2rs+2pqs^2)|\vec{b}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}$
$\quad(2pqr^2+2p^2rs)|\vec{a}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}$
$\quad-p^2r^2|\vec{a}|^4-q^2s^2|\vec{b}|^4-(rq+ps)^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$
$\quad-2(rq+ps)pr|\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})-2(rq+ps)qs|\vec{b}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})-2pqrs|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

$=(p^2s^2-2pqrs+r^2q^2)|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2+(-(rq+ps)^2+4pqrs)(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$
$+(2pqr^2+2p^2rs-2pr^2q-2p^2rs)|\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})$
$+(2q^2rs+2pqs^2-2rq^2s-2pqs^2)|\vec{b}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$=(ps-rq)^2|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(rq-ps)^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$=|ps-rq|^2\cdot\{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\}$ より

$p\vec{a}+q\vec{b}$, $r\vec{a}+s\vec{b}$ がなす三角形の面積は $|ps-rq|$

① $S(\triangle ABX)$ $\vec{a}$, $x\vec{a}+y\vec{b}$ より
$S(\triangle ABX)=|y|$

② $S(\triangle ACX)$ $\vec{b}$, $x\vec{a}+y\vec{b}$ より
$S(\triangle ACX)=|x|$

③ $S(\triangle BCX)$ $\overrightarrow{BX}=(x-1)\vec{a}+y\vec{b}$, $\overrightarrow{CX}=x\vec{a}+(y-1)\vec{b}$ より

$|(x-1)(y-1)-xy|=|1-x-y|$ よって

面積は $2\leq|x|+|y|+|1-x-y|\leq 3$ を満たすはんいを考えればよい

(i) $x,y\geq 0$ このとき
$2-x-y\leq|1-x-y|\leq 3-x-y$

① $x+y\leq 1$ のとき
$2-x-y\leq 1-x-y\leq 3-x-y \Rightarrow 2\leq 1\leq 3$ より ×

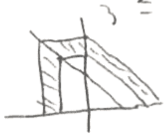
② $x+y\geq 1$ のとき
$2-x-y\leq x+y-1\leq 3-x-y$
$3\leq 2(x+y)\leq 4$ より

$\frac{3}{2}\leq x+y\leq 2$ のときに条件をみたす

(ii) $x\geq 0\geq y$ のとき
$2\leq x-y+|1-x-y|\leq 3$

① $x+y\leq 1$ のとき
$2\leq x-y+1-x-y\leq 3$
$1\leq -2y\leq 2$ より $-1\leq y\leq -\frac{1}{2}$

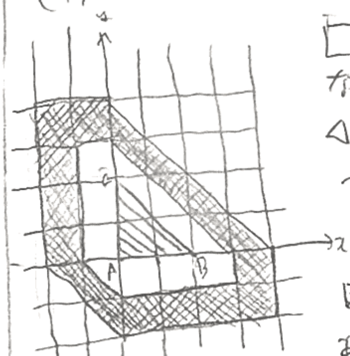
② $x+y\geq 1$ のとき
$2\leq x-y+x+y-1\leq 3$
$3\leq 2x\leq 4$ より $\frac{3}{2}\leq x\leq 2$



(iii) $y\geq 0\geq x$ のとき (ii)の x,y を入れかえたときに相当する。

(iv) $x,y\leq 0$
$2\leq -x-y+|1-x-y|\leq 3$
$x+y\leq 0$ より $1-x-y\geq 0$ より
$2\leq 1-2x-2y\leq 3$
$-1\leq x+y\leq -\frac{1}{2}$ となる

(i)～(iv) をまとめて図示すると



□ の1マスは面積$\frac{1}{2}$になっている。ここで ▨ の部分 △ABCは ▨ の部分で2マス→面積1 となっている

▨ の部分はXの位置である。この部分の面積は

◺×10 + ▨×10 = ▨ 15個分 よって

面積は $15\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{15}{2}}$

東大2020 $\boxed{3}$

$x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}$
$y(t)=3(1+t)\sqrt{1-t}$
$-1\leqq t\leqq 1$

$P(x(t),y(t))$

(1) $\frac{y(t)}{x(t)}$: 単調減少を示せ $-1<t<1$

(2) $|\vec{OP}|=f(t)$ $f(t)$の増減

(3) C: Pが$-1\leqq t\leqq 1$を動くときの軌跡
Cとx軸で囲まれた図形Dを原点回りに90°回転させたときの通過領域の面積

---

(1)
$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$ このとき, $s\geqq t$のとき

$\frac{3\sqrt{1-s}}{\sqrt{1+s}}\leqq\frac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+s}}\leqq\frac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$ より $\frac{y(s)}{x(s)}\leqq\frac{y(t)}{x(t)}$

よって単調減少

(2) $|\vec{OP}|^2=(f(t))^2=(1+t)^2(1+t)+9(1+t)^2(1-t)$
$=(1+t)^2\{1+t+9-9t\}=(1+t)^2\{10-8t\}$

よって $f(t)=(1+t)\sqrt{10-8t}$

$\frac{df(t)}{dt}=\sqrt{10-8t}+(1+t)\frac{-8}{2\sqrt{10-8t}}$

$=\frac{10-8t}{\sqrt{10-8t}}+\frac{-4-4t}{\sqrt{10-8t}}=\frac{6(1-2t)}{\sqrt{10-8t}}$

$2\leqq 10-8t\leqq 18$ より $\sqrt{10-8t}\geqq 0$.

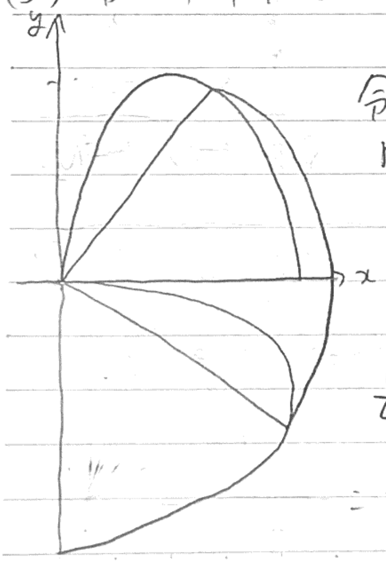
$-1\leqq t\leqq\frac{1}{2}$のとき $\frac{df(t)}{dt}\geqq 0$.

$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$のとき $\frac{df(t)}{dt}\leqq 0$

t	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{6}$	$\searrow$

よって fは$t=\frac{1}{2}$で maxとなる.

(3) Dを図示すると下のようになる.



領域の面積は
Dの面積+四分円の面積
である.

四分円の面積は

$\frac{1}{4}\cdot\pi\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)^2$
$=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\frac{54}{4}=\frac{27}{8}\pi$

Dの面積は,

$\int_{-1}^{1}y(t)\frac{dx(t)}{dt}dt$

$x(t)=(1+t)^{3/2}$ で…

$\frac{dx}{dt}(t)=\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{1+t}$ より

$=\int_{-1}^{1}3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1+t}\,dt$

$=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt$

$=9\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=9\cdot\frac{\pi}{4}$

よって面積は

$\frac{9}{4}\pi+\frac{27}{8}\pi=\frac{45}{8}\pi$ //

東大 2020 [4] $a_{n,k}=\sum_{0\le p_1<\cdots<p_k\le n-1} 2^{p_1+\cdots+p_k}$ (1) $a_{n,2}$ を求めよ.

$1\le k\le n$

(2) $f_n(x)=1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,n}x^n$ のとき, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を求めよ. (3) $\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を求めよ

(1)

$$a_{n,2}=\sum_{0\le i<j\le n-1}2^{i+j}=\sum_{i=0}^{n-2}2^i\cdot\sum_{j=i+1}^{n-1}2^j$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2}2^i(2^n-2^{i+1})=\sum_{i=0}^{n-2}2^{n+i}-2^{2i+1}$$

$$=2^n\cdot\sum_{i=0}^{n-2}2^i-2\cdot\sum_{i=0}^{n-2}4^i=2^n(2^{n-1}-1)-2\cdot\frac{4^{n-1}-1}{4-1}$$

$$=2^{2n-1}-2^n-\frac{1}{3}\cdot2^{2n-1}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot2^{2n}-2^n+\frac{2}{3}=\frac{2^{2n}-3\cdot2^n+2}{3}$$

$$=\frac{(2^n-1)(2^n-2)}{3}$$

(2) $2^na_{n,k}+a_{n,k+1}$

$$=\sum_{0\le p_1<\cdots<p_k\le n-1}2^{p_1+\cdots+p_k+n}+\sum_{0\le p_1<\cdots<p_{k+1}\le n-1}2^{p_1+\cdots+p_{k+1}}$$

$$=\sum_{0\le p_1<\cdots<p_{k+1}\le n}2^{p_1+\cdots+p_{k+1}}=a_{n+1,k+1}$$ このとき,

$$(1+2^nx)f_n(x)=(1+2^nx)(1+a_{n,1}x+\cdots a_{n,n}x^n)$$

$$=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$$
$$\quad 2^n\ x+2^na_{n,1}x^2+\cdots+2^na_{n,n-1}x^n+2^na_{n,n}x^{n+1}$$

$a_{n,1}=\sum_{0\le i\le n-1}2^i=2^n-1$ より $2^n+a_{n,1}=2^{n+1}-1=a_{n+1,1}$

$2^na_{n,n}=2^n\cdot2^{0+1+2+\cdots+n-1}=2^{0+\cdots+n}=a_{n+1,n+1}$

$$=1+a_{n+1,1}x+a_{n+1,2}x^2+\cdots+a_{n+1,n}x^n+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$$

$=f_{n+1}(x)$ より $\boxed{\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx}$

$a_{1,1}(x)=1$ より $f_1(x)=1+x$

$$f_n(x)=\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\right)\right)f_1(x)=\prod_{k=0}^{n-1}(1+2^kx)$$

$$f_n(2x)=\prod_{k=0}^{n-1}(1+2^{k+1}x)=\prod_{k=1}^{n}(1+2^kx)$$

よって $$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=\frac{\prod_{k=0}^{n}(1+2^kx)}{\prod_{k=1}^{n}(1+2^kx)}=1+x$$

より $\boxed{\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x}$

(3) $f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x)$ より x^{k+1} の係数は

$\boxed{k\le n-1 \text{ のとき}}$ $a_{n+1,k+1}=2^na_{n,k}+a_{n,k+1}$ …①

$f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)$ より

$a_{n+1,k+1}=2^ka_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1}$ …②

$$2^{k+1}a_{n+1,k+1}=2^{n+k+1}a_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1}$$

$$-)\quad a_{n+1,k+1}=2^ka_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1}$$

$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+1}-1)\cdot2^k\cdot a_{n,k}$ より

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$$

$k=n$ のとき,

$a_{n+1,k+1}=2^{0+1+\cdots+n}$

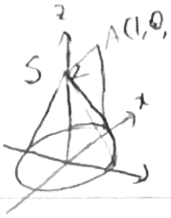
$a_{n,k}=2^{0+1+\cdots+n-1}$ より

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=2^n=\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}\quad(n=k)$$

以上より

$$\boxed{\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}}$$

東大 2020 [5]　$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$



A(1,0,2)　P∈D　T: APが通過する部分.

(1) $z=1$ における S, T のセツリロを図示.

(2) PがSを動くとき APが通過する部分の体積

(1), $(x,y)\in D$ なら $x^2+y^2\le 1$. このとき,

P: $(x,y,0)$, A$(1,0,2)$ の2点を通る線分は $0\le t\le 1$ を用いて.

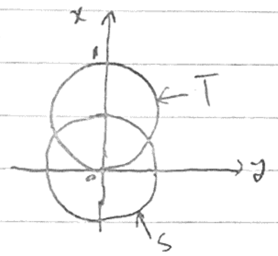
$t(x,y,0)+(1-t)(1,0,2)$

$=(tx+1-t,\ ty,\ 2(1-t))$　$z=1$ となるためには, $t=\frac{1}{2}$ より. 結局.

$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}y,\ 1\right)$　$X=\frac{x+1}{2}$, $Y=\frac{y}{2}$

$(2X-1)^2+(2Y)^2=x^2+y^2\le 1$　より

$\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+Y^2\le\frac{1}{4}$　となる 図にすると.



こうなる.

(2). $z=k$ で切ったとき Sの断面は.

$x^2+y^2\le\left(1-\frac{k}{2}\right)^2$　ここで,

(x,y,k) と $(1,0,2)$ を通るのは.

$(tx+1-t,\ yt,\ kt+2-2t)$.

ただし $0\le k\le 2$, $0\le t\le 1$, $x^2+y^2\le 1$

これを $z=h$ で切った断面は $(0\le h\le 2)$

$h=2-(2-k)t \iff (2-h)=(2-k)t$.

$0\le(2-k)t\le 2-k$ より.

$0\le 2-h\le 2-k$ よって.

$k\le h\le 2$

(X,Y,h) が断面に入る

$\iff X=tx+1-t,\ Y=yt$ なる k,t がある

$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-t\\0\end{pmatrix}$　$t=0$ のとき, 点 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ に状

$h=2$ のときは $k=2$, 線分と相

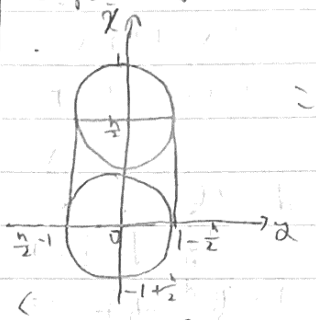
$t\ne 0$ のときは. $t=\frac{2-h}{2-k}$ より. $1-\frac{h}{2}\le t\le 1$

$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\frac{2}{2}t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-t\\0\end{pmatrix}$

より. $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1-t\\0\end{pmatrix}$ との距離が $\left(1-\frac{k}{2}\right)t=1-\frac{h}{2}$ 以下

となるような $t\in\left[1-\frac{h}{2},1\right]$ が存在する条件

を求めればいい. $(1-t,0)$ は $\left(\frac{h}{2},0\right)$ と $(0,0)$ を結ぶ線分となる 図示すると



このようになる. このとき

断面積は

$\pi\cdot\left(1-\frac{h}{2}\right)^2+\frac{h}{2}(2-h)$

$=\pi\left(\frac{h^2}{4}-h+1\right)+h-\frac{h^2}{2}$

$=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)h^2-(\pi-1)h+\pi$

体積は,

$\int_0^2\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)h^2-(\pi-1)h+1\right)dh$

$=\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{h^3}{3}-(\pi-1)\frac{h^2}{2}+h\pi\right]_0^2$

$=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{8}{3}-(\pi-1)\cdot 2+2\pi$

$=\frac{2\pi}{3}-\frac{4}{3}-2\pi+2+2\pi$

$=\frac{2}{3}+\frac{2\pi}{3}=\boxed{\frac{2}{3}(1+\pi)}$

東大2020 $\boxed{6}$

(1) $A, \alpha \in \mathbb{R}$ $A\sin(2\theta)-\sin(\theta+\alpha)=0$ の解は $A>1$ のとき, $0 \le \theta < 2\pi$ に4個以上あることを示せ.

(2) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$, $0<r<1$ について. $2x^2+y^2<r^2$ をみたす領域をD. ∃r ∀$(x,y) \in D$ (条件) そのときのmax r

条件: C上の点Q, Qにおける Cの接線とPQが垂直するものが4個以上ある.

---

(1) $f(\theta)=A\sin(2\theta)-\sin(\theta+\alpha)$ とおく

このとき. $f(\frac{\pi}{4})=A-\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha) > 0$

$f(\frac{3\pi}{4})=-A-\sin(\frac{3\pi}{4}+\alpha) < 0$

$f(\frac{5}{4}\pi)=A-\sin(\frac{5\pi}{4}+\alpha) > 0$

$f(\frac{7}{4}\pi)=-A-\sin(\frac{7\pi}{4}+\alpha) < 0$

$f(0)=f(2\pi)$ となっているので.

$f(0)>0$ のとき, $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$, $(\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi)$, $(\frac{5}{4}\pi,\frac{7\pi}{4})$ $(\frac{7\pi}{4},2\pi)$

にそれぞれ1個以上.

$f(0)\le 0$ のとき $[0,\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$, $(\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi)$

にそれぞれ1個以上ある(∵中間値定理).

よって $0\le\theta<2\pi$ に解は4個以上ある.

---

(2) C上の点Qは $\theta \in [0,2\pi)$ を用いることで.

$Q=(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta)$ とかける. このときの接線は.

$\frac{x\sqrt{2}\cos\theta}{2}+y\sin\theta=1$ とかけて, 法線ベクトルは

$\vec{n}=(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \sin\theta)$ である. D内の点をP(X, Y)と

おくと. $2X^2+Y^2<r^2$ となっていて.

$\vec{PQ}=(\sqrt{2}\cos\theta-X, \sin\theta-Y)$. これらが直交するので.

$\vec{n}$ と $\vec{PQ}$ が平行にになればよい. よって.

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta(\sin\theta-Y)=\sin\theta(\sqrt{2}\cos\theta-X)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\cos\theta-\frac{Y}{\sqrt{2}}\cos\theta=\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta-X\sin\theta$

$X\sin\theta-\frac{Y}{\sqrt{2}}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\cos\theta$

$\therefore \sqrt{2}X\sin\theta-Y\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$

$2\sqrt{2X^2+Y^2}\left\{\frac{\sqrt{2}X}{\sqrt{2X^2+Y^2}}\sin\theta-\frac{Y}{\sqrt{2X^2+Y^2}}\cos\theta\right\}=\sin2\theta$

$\alpha=\alpha(X,Y)$ を, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}X}{\sqrt{2X^2+Y^2}}$, $\sin\alpha=\frac{-Y}{\sqrt{2X^2+Y^2}}$ を

みたすものとすると.

$\sin(\theta+\alpha(X,Y))=\frac{1}{2\sqrt{2X^2+Y^2}}\cdot\sin2\theta$

$r\le\frac{1}{2}$ のとき $\frac{1}{2\sqrt{2X^2+Y^2}}\ge\frac{1}{2r}\ge1$ より.

このときは(1)より. (X, Y)に対して条件をみたす

θ が4つ以上存在する.

逆に $r>\frac{1}{2}$ のとき

$2X^2+Y^2=\frac{1}{4}$ $\sqrt{2}X=-Y$ としたとき

つまり $X=\frac{1}{4}$, $Y=\frac{-\sqrt{2}}{4}$ としたとき

$2X^2+Y^2=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}=(\frac{1}{2})^2<r^2$ より

$(X,Y)\in D$ であり, $\sqrt{2X^2+Y^2}=\frac{1}{2}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}/4}{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}/4}{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって $\alpha(X,Y)=\frac{\pi}{4}$ よってこのとき,

対応する θ の値は

$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sin2\theta$ より

$\sin\theta+\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$

$\sin\theta+\cos\theta=t$ としたとき,

$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より $2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

よって $t=\sqrt{2}(t^2-1)$

$t^2-\frac{t}{\sqrt{2}}-1=0$

$(t-\sqrt{2})(t+\frac{1}{\sqrt{2}})$ より.

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ より.

$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=1, -\frac{1}{2}$

これをみたす θ は

$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ より.

$\theta=\frac{\pi}{4}, \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$ の3つだけである.

よってこのとき条件をみたさない.

よって実際に条件をみたすrが存在して.

条件をみたすrのmaxは $\boxed{\frac{1}{2}}$ である.