



(1) (1) > 0, sin θ

(2) $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき

(1) $\cos \theta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1^2 + 1^2 - (\frac{1}{2})^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{7}{4} = \frac{7}{8}$

$\sin \theta = \sqrt{1 - (\cos \theta)^2} = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ ($\because 0 < \theta < \pi/2$, $\sin \theta > 0$)

(2) $\angle AHB = \frac{\pi}{2}$ より、 $AH = (\cos \theta) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$,
 $BH = \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$ より $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$
 とおくと、
 $\vec{AH} = \frac{7}{16} \vec{b}$ とおける。

よって $\vec{AP} = s\vec{a} + \frac{7}{16}(1-s)\vec{b}$ とおける ←

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{a} = 1, \vec{b} \cdot \vec{b} = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{7}{8}$

$\vec{BP} = \vec{AP} - \vec{AB} = (s-1)\vec{a} + \frac{7}{16}(1-s)\vec{b}$
 $\vec{CP} = \vec{AP} - \vec{AC} = s\vec{a} + (\frac{7}{16}(1-s) - 1)\vec{b}$
 $= s\vec{a} + \frac{1}{16}(-15-s)\vec{b}$

$\therefore |\vec{AP}|^2 = s^2 + \frac{49}{64}(1-s)^2 + \frac{7}{4}s(1-s)$
 $= s^2 + \frac{49}{64}(1-s)^2 + \frac{7}{4}s(1-s)$
 $= s^2 + \frac{49}{64}(1-s^2) = \frac{49}{64} + \frac{15}{64}s^2$

$|\vec{BP}|^2 = (s-1)^2 + \frac{49}{64}(1-s)^2 - 2 \cdot \frac{7}{16}(1-s) \cdot \frac{7}{8}$
 $= (1-s)^2 + \frac{49}{64}(1-s)^2 - \frac{49}{64}(1-s)^2$
 $= \frac{15}{64}(1-s)^2 = \frac{15}{64}s^2 + \frac{15}{64} - \frac{30}{64}s$

$|\vec{CP}|^2 = s^2 + \frac{1}{64}(15s+1)^2 - \frac{5}{4}(15s+1) \cdot \frac{7}{8}$
 $= s^2 + \frac{1}{64}(15s+1)^2 - \frac{145}{64}(15s+1)$
 $= s^2 + \frac{1}{64}(1+15s)(1-15s)$
 $= s^2 + \frac{1}{64} - \frac{49}{64}s^2 = \frac{15}{64}s^2 + \frac{1}{64}$

よって
 $|\vec{AP}|^2 + |\vec{BP}|^2 + |\vec{CP}|^2$
 $= \frac{49}{64} + \frac{15}{64}s^2 + \frac{15}{64}s^2 + \frac{15}{64} - \frac{30}{64}s + \frac{15}{64}s^2 + \frac{1}{64}$
 $= \frac{45}{64}s^2 - \frac{30}{64}s + \frac{65}{64}$
 $= \frac{5}{64}(9s^2 - 6s + 13)$
 $= \frac{5}{64}((3s-1)^2 + 12)$ より
 \therefore これは $s = \frac{1}{3}$ のとき、最小値 $\frac{15}{16}$ となる。

としたいときは、
 $\vec{AP} = s\vec{a} + \frac{7}{16}(1-s)\vec{b}$ ではなく
 $\vec{AP} = (1-s)\vec{a} + \frac{7}{16}s\vec{b}$ とおくと、

以後は全て $s \rightarrow 1-s$ に変換すれば
 都合がよい。よって本問の答えは

$s = \frac{2}{3}$ のとき、最小値 $\frac{15}{16}$ となる。

東大 2020 (2) $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$. $C: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$
 $L: -4x + 3y + a = 0$, $M: 3x + 4y - 7a = 0$

- (1) L と M の交点が C 上にある a の値 (3) $\#(C \cap L) \cup (C \cap M) = 3$ となる a の値を
 (2) C と L が異なる 2 個の異なる点と交わる

(1) L と M の交点
 $-12x + 9y + 3a = 0$ $\rightarrow 2(x, y) = (a, a)$
 $1) \begin{cases} 12x + 16y - 28a = 0 \\ 25y - 25a = 0 \\ y = a \end{cases}$

C: $(x-a)^2 + (y-2)^2 = a^2$ \rightarrow 半径 a , 中心 $(a, 2)$
 C 上にある $(a, 2)$. $(a-2)^2 = a^2$ \rightarrow $(a-2)^2 = a^2$
 $\rightarrow a^2 - 4a + 4 = a^2 \rightarrow 4a = 4 \rightarrow a = 1$
 $\rightarrow a = 1$ のとき, L と M の交点が C 上にある.

(2) L: $-4x + 4a = -3y - a + 4a$ $\rightarrow -4(x-a) = -3(y-a)$
 $(2-a) = \frac{3}{4}(y-a)$ \rightarrow 直線 C 上の点

$\frac{9}{16}(y-a)^2 + (y-2)^2 = a^2$
 $\frac{9}{16}y^2 - \frac{9}{8}ya + \frac{9}{16}a^2 + y^2 - 4y + 4 - a^2 = 0$
 $\frac{25}{16}y^2 - (4 + \frac{9}{8}a)y + 4 - \frac{7}{16}a^2 = 0$
 二次方程式が異なる 2 個の実数解をもたなければならない.

$\frac{D}{4} = \left(2 + \frac{9}{8}a\right)^2 - \frac{25}{16} \left(4 - \frac{7}{16}a^2\right)$
 $= \frac{81}{256}a^2 + \frac{36}{16}a + 4 - \frac{100}{16} + \frac{175}{256}a^2$
 $= \frac{256}{256}a^2 + \frac{9}{4}a - \frac{9}{4} = a^2 + \frac{9}{4}a - \frac{9}{4}$
 $= \left(a + \frac{9}{8}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{81}{64} = \left(a + \frac{9}{8}\right)^2 - \frac{225}{64}$
 $= \left(a + \frac{9}{8}\right)^2 - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = (a+3)\left(a - \frac{3}{4}\right)$
 $a < -3, \frac{3}{4} < a$ のとき, $D > 0$ \rightarrow 異なる 2 点

(3) M: $3(x-a) = -4(y-a)$
 $(x-a) = -\frac{4}{3}(y-a)$ \rightarrow 直線 C 上の点
 $\frac{16}{9}(y-a)^2 + (y-2)^2 = a^2$
 $\frac{16}{9}y^2 + \frac{16}{9}a^2 - \frac{22}{3}ya + y^2 - 4y + 4 - a^2 = 0$
 $\Rightarrow \frac{25}{9}y^2 - 2\left(2 + \frac{16}{9}a\right)y + 4 + \frac{7}{9}a^2 = 0$

$\frac{D}{4} = \left(2 + \frac{16}{9}a\right)^2 - \frac{25}{9} \left(4 + \frac{7}{9}a^2\right)$
 $= 4 + \frac{256}{81}a^2 + \frac{64}{9}a - \frac{100}{9} - \frac{175}{81}a^2$
 $= a^2 + \frac{64}{9}a - \frac{64}{9} = \left(a + \frac{32}{9}\right)^2 - \frac{64}{9} - \frac{100}{81}$
 $= \left(a + \frac{32}{9}\right)^2 - \frac{104 + 100}{81} = \left(a + \frac{32}{9}\right)^2 - \frac{204}{81}$
 $= \left(a + \frac{32}{9} + \frac{40}{9}\right)\left(a + \frac{32}{9} - \frac{40}{9}\right) = (a+8)\left(a - \frac{8}{9}\right)$
 $a < -8, \frac{8}{9} < a$ のとき, 異なる 2 点

(1) $a \neq 1$ のとき, $L \cap M = \emptyset$
 $\#((C \cap L) \cup (C \cap M)) = \#(C \cap L) + \#(C \cap M)$
 \rightarrow $a < -8$ のとき, $\#(C \cap L) = 2, \#(C \cap M) = 2$ \rightarrow 4
 $a = -8$ のとき, $\#(C \cap L) = 2, \#(C \cap M) = 1$ \rightarrow 3 \rightarrow OK
 $-8 < a < -3$ のとき, $\#(C \cap L) = 2, \#(C \cap M) = 0$ \rightarrow 2
 $a = -3$ のとき, $\#(C \cap L) = 1, \#(C \cap M) = 0$ \rightarrow 1
 $-3 < a < \frac{3}{4}$ のとき, $\#(C \cap L) = 0, \#(C \cap M) = 0$ \rightarrow 0
 $a = \frac{3}{4}$ のとき, $\#(C \cap L) = 1, \#(C \cap M) = 0$ \rightarrow 1
 $\frac{3}{4} < a < 8$ のとき, $\#(C \cap L) = 2, \#(C \cap M) = 0$ \rightarrow 2
 $a = 8$ のとき, $\#(C \cap L) = 2, \#(C \cap M) = 1$ \rightarrow 3 \rightarrow OK
 $8 < a$ のとき, $\#(C \cap L) = 2, \#(C \cap M) = 2$ \rightarrow 4
 したがって, $a = 1$ のとき,
 $\#((C \cap L) \cup (C \cap M)) = \#(C \cap L) + \#(C \cap M) - \#(C \cap M \cap L)$
 $= 2 + 2 - 1 = 3$ \rightarrow OK

以上より $a = -8, \frac{8}{9}, 1$

2020 (3)

(1) $n \geq 3$ であるとき、 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ である。

$n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ $a, b \in \mathbb{Z}_{20}$

(2) $2^n + n^2 + 8 \geq 3^n$ であるとき、 $n \in \mathbb{Z}$ である。

(3) $2^n + n^2 + 8 = 3^a + a + b$ であるとき、 (a, b, n) である。

(1) $n \geq 4$ のとき、

$$2^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$= 1 + n + \frac{n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{n+1}{6}(n^2 - n + 6)$$

$$= \frac{1}{6}(n^3 - n^2 + n^2 - n + 6n + 6) = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$$

よして $2^n - n^2 \geq \frac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 5n + 6)$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 6$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 5 = 3(x-2)^2 - 7 \geq 0$

f は $x \geq 4$ で単調増加。

$n \geq 5$ のとき、 $f(n) \geq f(5) \geq 6 \geq 0$

$n = 4$ のとき、 $2^4 - 4^2 = 0$ である。

$n \geq 4$ のとき、 $2^n \geq n^2$ である。

$n \geq 4$ のとき、

$2^n + n^2 + 8 \leq 2^n + 2^n + 2^n = 3 \cdot 2^n$ である。

$2^n < 3^{n-1}$ である。

$n = 4$ のとき、 $16 < 27$ である。

$3^n > 3 \cdot 2^n > 2^{n+1}$ である。

$n = 3$ のとき、

$2^3 + 3^2 + 8 = 8 + 9 + 8 = 25$

$3^3 = 27$ である。

よして $n \geq 3$ のとき、 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ である。

(2) $n < 3$ のとき、 $n = 1, 2$ のとき、(1)より

$n = 1$ のとき、 $2^1 + 1^2 + 8 = 11, 3^1 = 3$

$n = 2$ のとき、 $2^2 + 2^2 + 8 = 16, 3^2 = 9$ である。

$n = 1, 2$ のとき、 $2^n + n^2 + 8 \geq 3^n$ である。

(3) $a, b \geq 0, n \geq 1$ のとき、 $3^a + a + b \geq 3^n$ である。

よして $3^a + a + b \geq 3^n$ である。

$2^n + n^2 + 8 \geq 3^n$ である。

(i) $n = 1$ のとき、 $11 = 3 + a + b$ である。

よして $(a, b) = (k, 8-k)$ ($0 \leq k \leq 8$) である。

(ii) $n = 2$ のとき、 $16 = 9 + 2a + b$ である。

よして $(a, b) = (0, 7), (1, 5), (2, 3), (3, 1)$ である。

よして $(n, a, b) = (1, 0, 8), (1, 1, 7), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (1, 5, 3), (1, 6, 2), (1, 7, 1), (1, 8, 0), (2, 0, 7), (2, 1, 5), (2, 2, 3), (2, 3, 1)$ である。

①
ww
RR

(1) 正と負の -1/2 あり 337 12<345 なる5桁止

(1) 2桁目から W, R, T, S, 3, 4, 2, 1, 7, 6, 5, 8, 9, 10, 11, 12
(1) n=5, n=10, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

(1) 2回と7のインが表と表に113.02
 $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{40}$
 1回だけ表が出る確率

(2) (1) 1回目は332
 $1 \times \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \right\}$
 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \left\{ \frac{6}{20} + \frac{6}{20} \right\} = \frac{6}{80} = \frac{3}{40}$

(2) 2回目=55
 $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \left[1 \times \frac{1}{2} \right] \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{2}$
 $+ \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \left[1 \times \frac{1}{2} \right] \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \times \left\{ \frac{6}{20} + \frac{6}{20} \right\}$
 $= \frac{12}{160} = \frac{3}{40}$

(3) 3回目=55
 $\left[\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \right] \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{40}$
 よし、確率は $\frac{3}{40} + \frac{3}{40} + \frac{3}{40} = \frac{9}{40}$

(3) n-1回なら4回だけ表が出た最後の位
 表が出た5回、5,2がくりこす。

$P_n = n-1 C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n-1 C_4}{2^n}$ とする。

(4) $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n C_4}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n-1 C_4}$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \cdot \frac{24}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
 $= \frac{n}{2(n-4)}$ とする。 $n \geq 8$

$\frac{n}{2(n-4)} < 1 \Leftrightarrow n < 2n-8$
 $\Leftrightarrow 8 < n$ とする。
 $\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1 (8 < n)$, $\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 (8=n)$, $\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1 (8 > n)$
 とする。
 よし。

$P_1 < P_2 < \dots < P_8 = P_9 \rightarrow P_{10} > P_{11} > \dots$
 とする。 $n=8, 9$ のときは
 P_n が max とする。

予想、出た4物は同じ位の。
 (1)(2) と (3)(4) 2
 問題が全く別物にしている。

東大 2020 [5] $t \in \mathbb{R}$ とし $z = \frac{-1}{t+i}$

(1) $\text{Re } z, \text{Im } z$ を t の関数として表せ

(2) $|z - \frac{i}{2}|$ を t の関数として表せ

(3) $-1 \leq t \leq 1$ のときの z の軌跡を求めよ

(1) $z = \frac{-1(t-i)}{(t+i)(t-i)} = \frac{-t+i}{t^2+1}$ (よ)

$\text{Re } z = \frac{-t}{t^2+1}, \text{Im } z = \frac{1}{t^2+1}$

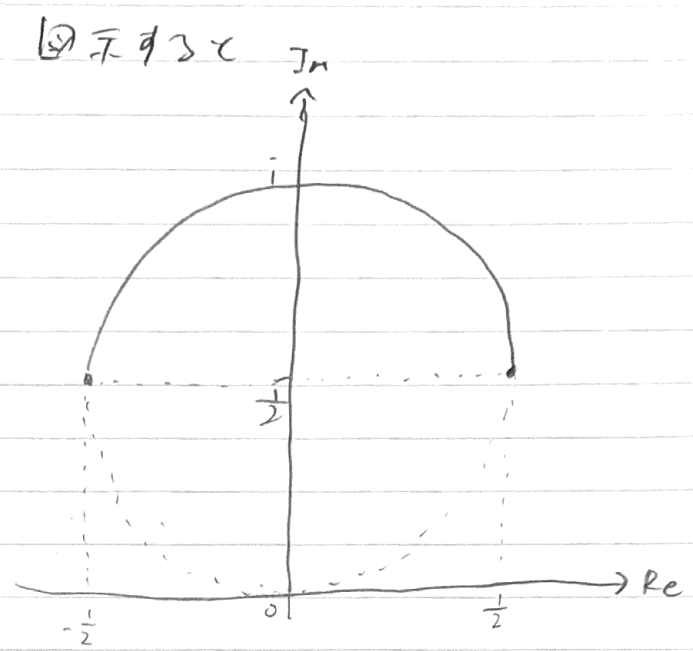
(2) $|z - \frac{i}{2}| = \left| \frac{-t}{t^2+1} + \frac{2i}{2(t^2+1)} - \frac{(t^2+1)i}{2(t^2+1)} \right|$

$= \left| \frac{-t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{2(t^2+1)}i \right|$

$= \sqrt{\frac{t^2}{(t^2+1)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{4(t^2+1)^2}}$

$= \frac{1}{2(t^2+1)} \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1}$

$= \frac{t^2+1}{2(t^2+1)} = \frac{1}{2}$



(3) (2)より、 z は中心 $\frac{1}{2}$ 、半径 $\frac{1}{2}$ の円上にあり、 $\text{Re } z, \text{Im } z$ の値は t の値によって変化する。軌跡を求めよ。

$t = \tan \theta$ とおくと、
 $|\theta| \leq \frac{\pi}{4}$ とおくと、

$\text{Re } z = \frac{-\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = -\sin \theta \cos \theta$
 $= -\frac{1}{2} \sin 2\theta$

$\text{Im } z = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$

$\theta = 2\phi$ とおくと、 $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、
 $(-\frac{1}{2} \sin \phi, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \phi)$ の軌跡を求めよ。

よって $\text{Im } z$ は $\frac{1}{2} \leq \text{Im } z \leq 1$ となる。よって、
 $\frac{1}{2} \leq \text{Im } z \leq 1$ のとき、 $-\frac{1}{2} \sin \phi$ となる。
 半円の中心の定理を使うと、 $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ に
 対応する ϕ がある。よって軌跡は

円 $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ の上半部分 $\frac{1}{2} \leq \text{Im } z \leq 1$ の部分 である。

東北大学 2020 6 $A(m, n) = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x dx$

(1) $A(m, n) = A(n, m)$, $A(m+2, n) + A(m, n+2) = A(m, n)$ である。

(2) $A(m, 1)$ である。(3) $A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2, n)$ である。(4) m, n の odd かつ $A(m, n) \in \mathbb{Q}$ である。

(1) $y = \frac{\pi}{2} - x$ と置換

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^m y \cos^n y dy$$

$\Rightarrow A(m, n) = A(n, m)$

$A(m, n) - A(m, n+2)$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x dx - \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^{n+2} x dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \sin^n x dx = A(m+2, n)$$

(2) $A(m, 1) = A(1, m)$ (1)より

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos x dx \quad \sin x = u \text{ と置換}$$

$(\cos x dx = du)$

$$= \int_0^1 u^m \cdot du = \frac{1}{m+1}$$

(3) $A(m, n+2) = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^{n+2} x dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^{n+2} x dx \quad (1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^m x \cdot \cos x) \cdot \cos^{n+1} x dx$$

$$= \left[\frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cdot \cos^{n+1} x \right]_0^{\pi/2}$$

$$- \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cdot (n+1) \cdot \cos^n x \cdot (-\sin x) dx$$

$$= \frac{n+1}{m+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{m+2} x \cdot \cos^n x dx$$

$$= \frac{n+1}{m+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{m+2} x \cdot \cos^n x dx$$

$$= \frac{n+1}{m+1} A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2, n)$$

(4) $A(m, n) = A(n, m)$ より、 m が奇数の

ときは n が偶数である。 $m = 2k+1$ ($k \geq 0$)

$$A(2k+1, n) = A(n, 2k+1)$$

n が奇数のときは帰着できる。

$$A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2, n)$$

$$A(m, n) - A(m, n+2) = A(m+2, n)$$

$$\Rightarrow A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1} \{A(m, n) - A(m, n+2)\}$$

$$\Rightarrow \frac{m+n+2}{m+1} A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m, n)$$

$$\Rightarrow A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+n+2} A(m, n)$$

$$A(n, m+2) = \frac{m+1}{m+n+2} A(n, m)$$

$$\Rightarrow A(m+2, n) = \frac{n+1}{m+n+2} A(m, n)$$

$$A(1, n) = A(n, 1) = \frac{1}{n+1}$$

m, n の odd かつ $A(m, n) \in \mathbb{Q}$ である。

$$A(m+2, n) = \frac{n+1}{m+n+2} A(m, n) \in \mathbb{Q}$$

m, n の odd かつ $A(m, n) \in \mathbb{Q}$ である。

$A(m, n) \in \mathbb{Q}$ であることが示された。

背景

A の問題の背景

$$B(n, m) = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{n! m!}{(n+m+1)!}$$

$$x = \sin^2 \theta \text{ と置換 } [dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta]$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta \cdot \cos^{2m} \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \theta \cos^{2m+1} \theta d\theta$$

これはガンマ関数 (階乗の一般化) による

表記もできる。 $\Gamma(\frac{1}{2})!$ とか

の値。 実際には $\sqrt{\pi}$ が出る。