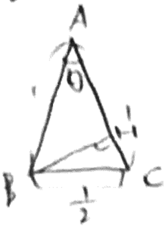
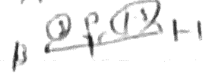
東工大 2020 $\boxed{1}$



(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$

(2) $AP^2+BP^2+CP^2$ の最小値，そのときの s



(1)
$$\cos\theta = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{1^2+1^2-\frac{1}{2^2}}{2\cdot1\cdot1} = \frac{\frac{7}{4}}{2} = \frac{7}{8}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8} \quad (\because 0<\theta<\pi \text{ より } \sin\theta>0)$$

(2) $\angle AHB = \frac{\pi}{2}$ より $AH = \cos\theta = \frac{7}{8}$，
$BH = \sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$ よって $\vec{AB}=\vec{a}$，$\vec{AC}=\vec{b}$
とおいたとき
$\vec{AH} = \frac{7}{8}\vec{b}$ となる．

よって $\vec{AP} = s\vec{a}+\frac{7}{8}(1-s)\vec{b}$ となる

$\boxed{\text{ここで，} |\vec{a}|^2=1,\ |\vec{b}|^2=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{7}{8}}$

$$\vec{BP} = \vec{AP}-\vec{AB} = (s-1)\vec{a}+\frac{7}{8}(1-s)\vec{b}$$
$$\vec{CP} = \vec{AP}-\vec{AC} = s\vec{a}+\left(\frac{7}{8}-\frac{7s}{8}-1\right)\vec{b} = s\vec{a}+\frac{1}{8}(-7s-1)\vec{b}$$

ここで，
$$|\vec{AP}|^2 = s^2+\frac{49}{64}(1-s)^2+\frac{7s}{4}(1-s)\cdot\frac{7}{8}$$
$$= s^2+\frac{49}{64}(1-s)^2+\frac{49}{64}(2s(1-s))$$
$$= s^2+\frac{49}{64}(1-s^2) = \frac{49}{64}+\frac{15}{64}s^2$$

$$|\vec{BP}|^2 = (s-1)^2+\frac{49}{64}(1-s)^2-2\cdot\frac{7}{8}(1-s)^2\cdot\frac{7}{8}$$
$$= (1-s)^2+\frac{49}{64}(1-s)^2-2\cdot\frac{49}{64}(1-s)^2$$
$$= \frac{15}{64}(s-1)^2 = \frac{15}{64}s^2+\frac{15}{64}-\frac{30}{64}s$$

$$|\vec{CP}|^2 = s^2+\frac{1}{64}(7s+1)^2-\frac{s}{4}(7s+1)\cdot\frac{7}{8}$$
$$= s^2+\frac{1}{64}(7s+1)^2-\frac{14s}{64}(7s+1)$$
$$= s^2+\frac{1}{64}(1+7s)(1-7s)$$
$$= s^2+\frac{1}{64}-\frac{49}{64}s^2 = \frac{15}{64}s^2+\frac{1}{64}.$$

よって
$$|\vec{AP}|^2+|\vec{BP}|^2+|\vec{CP}|^2$$
$$= \frac{49}{64}+\frac{15}{64}s^2+\frac{15}{64}s^2+\frac{15}{64}-\frac{30}{64}s+\frac{15}{64}s^2+\frac{1}{64}$$
$$= \frac{45}{64}s^2-\frac{30}{64}s+\frac{65}{64}$$
$$= \frac{5}{64}(9s^2-6s+13)$$
$$= \frac{5}{64}\{(3s-1)^2+12\} \text{ より，}$$

これは $s=\frac{1}{3}$ のとき，最小値 $\frac{15}{16}$ をとる……

としたいところですが，

$\vec{AP} = s\vec{a}+\frac{7}{8}(1-s)\vec{b}$ ではなく

$\vec{AP} = (1-s)\vec{a}+\frac{7}{8}s\vec{b}$ が正しいです

以降は全て $s \mapsto 1-s$ に変換すれば全て合います．よって本当の答えは

$s=\frac{2}{3}$ のとき，最小値 $\frac{15}{16}$ をとる //

です

東北大 2020 ② $a \neq 0$ $a \in \mathbb{R}$. 円 $C: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$
直線 $L: -4x + 3y + a = 0$, $M: 3x + 4y - 7a = 0$

(1) L と M の交点が C 上にある a の値　　(3) $\#((C \cap L) \cup (C \cap M)) = 3$ となる a の値全て

(2) C と L が異なる2個の共有点をもつ a の範囲

---

(1) L と M の共有点は.

$$
\begin{array}{rl}
 & -12x + 9y + 3a = 0 \\
+) & 12x + 16y - 28a = 0 \\
\hline
 & 25y - 25a = 0 \\
 & y = a.
\end{array}
$$

よって $(x, y) = (a, a)$

$C: (x-a)^2 + (y-2)^2 = a^2$ だから, (a, a) が C 上にあるためには, $(a-2)^2 = a^2$ となり,

$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = a^2 \Leftrightarrow 4a = 4$ より $a = 1$ である.

よって $a = 1$ のとき, L と M の共有点が C 上にある.

(2) $L: -4x + 4a = -3y - a + 4a$ より.
$-4(x-a) = -3(y-a)$ より
$(x-a) = \frac{3}{4}(y-a)$ これを C に代入すると.

$$\frac{9}{16}(y-a)^2 + (y-2)^2 = a^2$$

$$\frac{9}{16}y^2 - \frac{9}{8}ya + \frac{9}{16}a^2 + y^2 - 4y + 4 - a^2 = 0$$

$$\frac{25}{16}y^2 - \left(4 + \frac{9}{8}a\right)y + 4 - \frac{7}{16}a^2 = 0.$$

これが異なる2個の実数解をもてばよい.

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{4} &= \left(2 + \frac{9}{16}a\right)^2 - \frac{25}{16}\left(4 - \frac{7}{16}a^2\right) \\
&= \frac{81}{256}a^2 + \frac{36}{16}a + 4 - \frac{100}{16} + \frac{175a^2}{256} \\
&= \frac{256}{256}a^2 + \frac{9}{4}a - \frac{9}{4} = a^2 + \frac{9}{4}a - \frac{9}{4} \\
&= \left(a + \frac{9}{8}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{81}{64} = \left(a + \frac{9}{8}\right)^2 - \frac{225}{64} \\
&= \left(a + \frac{9}{8}\right)^2 - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = (a+3)\left(a - \frac{3}{4}\right) \text{ より}.
\end{aligned}
$$

$a < -3$, $\frac{3}{4} < a$ のとき, $D > 0$ で共有点が2個.

(3) $M: 3(x-a) = -4(y-a)$
$(x-a) = -\frac{4}{3}(y-a)$. を C に代入

$$\frac{16}{9}(y-a)^2 + (y-2)^2 = a^2$$

$$\frac{16}{9}y^2 + \frac{16}{9}a^2 - \frac{32}{9}ya + y^2 - 4y + 4 - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}y^2 - 2\left(2 + \frac{16}{9}a\right)y + 4 + \frac{7}{9}a^2 = 0$$

このとき, 判別式 D について.

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{4} &= \left(2 + \frac{16}{9}a\right)^2 - \frac{25}{9}\left(4 + \frac{7}{9}a^2\right) \\
&= 4 + \frac{256}{81}a^2 + \frac{64}{9}a - \frac{100}{9} - \frac{175}{81}a^2 \\
&= a^2 + \frac{64}{9}a - \frac{64}{9} = \left(a + \frac{32}{9}\right)^2 - \frac{64}{9} - \frac{1024}{81} \\
&= \left(a + \frac{32}{9}\right)^2 - \frac{1024 + 576}{81} = \left(a + \frac{32}{9}\right)^2 - \frac{1600}{81} \\
&= \left(a + \frac{32}{9} + \frac{40}{9}\right)\left(a + \frac{32}{9} - \frac{40}{9}\right) = (a+8)\left(a - \frac{8}{9}\right) \text{ より}.
\end{aligned}
$$

$a < -8$, $\frac{8}{9} < a$ のとき, 共有点が2つある.

(1)より, $a \neq 1$ のとき, $L \cap M = \phi$ より.

$\#((C \cap L) \cup (C \cap M)) = \#(C \cap L) + \#(C \cap M)$

である. $a < -8$ のとき, $\#(C \cap L) = 2$, $\#(C \cap M) = 2$ より ×

$a = -8$ のとき $\#(C \cap L) = 2$, $\#(C \cap M) = 1$ より OK

$-8 < a < -3$ のとき $\#(C \cap L) = 2$, $\#(C \cap M) = 0$ より ×

$a = -3$ のとき $\#(C \cap L) = 1$, $\#(C \cap M) = 0$ より ×.

$-3 < a < \frac{3}{4}$ のとき, $\#(C \cap L) = 0$, $\#(C \cap M) = 0$ より ×.

$a = \frac{3}{4}$ のとき $\#(C \cap L) = 1$, $\#(C \cap M) = 0$ より ×

$\frac{3}{4} < a < \frac{8}{9}$ のとき, $\#(C \cap L) = 2$ $\#(C \cap M) = 0$ より ×

$a = \frac{8}{9}$ のとき, $\#(C \cap L) = 2$, $\#(C \cap M) = 1$ より OK.

$\frac{8}{9} < a$ $a \neq 1$ のとき, $\#(C \cap L) = 2$, $\#(C \cap M) = 2$ より ×

また, $a = 1$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\#((C \cap L) \cup (C \cap M)) &= \#(C \cap L) + \#(C \cap M) \\
&\quad - \#(C \cap M \cap L) \\
&= 2 + 2 - 1 = 3 \text{ より OK}.
\end{aligned}
$$

以上より $a = -8, \frac{8}{9}, 1$.

東北大 2020 $\boxed{3}$

$n\geqq1,\ n\in\mathbb{N}\quad a,b\in\mathbb{Z}_{\geqq0}$

(1) $n\geqq3$ のとき, $2^n+n^2+8<3^n$ を示せ.

(2) $2^n+n^2+8\geqq3^n$ となる n を求めよ.

(3) $2^n+n^2+8=3^n+an+b$ となる (a,b,n) を全て求めよ.

---

(1)
$n\geqq4$ のとき,

$$2^n\geqq1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$
$$=1+n+\frac{n(n-1)(n+1)}{6}=\frac{n+1}{6}(n^2-n+6)$$
$$=\frac{1}{6}(n^3-n^2+n^2-n+6n+6)=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$$

より $2^n-n^2\geqq\frac{1}{6}(n^3-6n^2+5n+6)$

$f(x)=x^3-6x^2+5x+6$ について.

$f'(x)=3x^2-12x+5=3(x-2)^2-7\geqq0$

$\therefore$ fは単調増加 $(x\geqq4)$

$n\geqq5$ のときは, $f(n)\geqq f(5)\geqq6\geqq0$.

$n=4$ のとき, $2^n-n^2=0$ より.

$n\geqq4$ のとき, $2^n\geqq n^2$ となる.

$n\geqq4$ のとき,

$2^n+n^2+8\leqq2^n+2^n+2^n=3\cdot2^n$ より

$2^n<3^{n-1}$ を示せば十分

$n=4$ のとき, $16<27$ より成立 以降も

$3^n>3\cdot2^n>2^{n+1}$ より成立する.

$n=3$ については

$2^n+n^2+8=8+9+8=25$

$3^n=27$ より成立する.

よって $n\geqq3$ のとき,

$2^n+n^2+8<3^n$ となる

(2) $n<3$ でなくてはいけない. ((1)より)

$n=1$ のとき,

$2^n+n^2+8=11,\ 3^n=3$

$n=2$ のとき,

$2^n+n^2+8=16,\ 3^n=9$ より

$n=1,2$ のとき,

$2^n+n^2+8\geqq3^n$ となる.

(3) $a,b\geqq0,\ n\geqq1$ より

$3^n+an+b\geqq3^n$ となる.

この等式が成立するためには,

$2^n+n^2+8\geqq3^n$ より. $n=1,2$ でなくてはいけない.

(i) $n=1$ のとき,

$11=3+a+b$ より $a+b=8$

より $(a,b)=(k,8-k)\ (0\leqq k\leqq8)$ のとき成立.

(ii) $n=2$ のとき,

$16=9+2a+b$ より $2a+b=7$

より $(a,b)=(0,7),(1,5),(2,3),(3,1)$ となる

よって $(n,a,b)=(1,0,8)(1,1,7)(1,2,6)$

$(1,3,5)(1,4,4)(1,5,3)$

$(1,6,2)(1,7,1)(1,8,0)$

$(2,0,7)(2,1,5)(2,2,3)(2,3,1)$

となる.

東北大2020 [4]

ふくろ WWW RR　　コイン　玉をとりだす→コインが おもて：戻さず／うら：戻す　　ふくろからなくなったら停止

(1) 2回目のあとで W×2となるかくりつ　(2) 3回目のあとで W, R となるかくりつ

(3) $n \geq 5$, n回目で停止するかくりつ　(4) P_n がmaxとなる n

---

(1) 2回ともコインが表となっているので

$$\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{40}$$

1回だけ表が出なくてはいけない

(2) ① 1回目にうら

$$1\times\frac{1}{2}\times\left\{\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\left\{\frac{6}{20}+\frac{6}{20}\right\}=\frac{6}{80}=\frac{3}{40}$$

② 2回目にうら

$$\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\underbrace{1\times\frac{1}{2}}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}$$

$$+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\underbrace{1\times\frac{1}{2}}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\times\left\{\frac{6}{20}+\frac{6}{20}\right\}$$

$$=\frac{12}{160}=\frac{3}{40}$$

③ 3回目にうら

$$\left[\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right]\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{40}$$

より、確率は、$\frac{3}{40}+\frac{3}{40}+\frac{3}{40}=\frac{9}{40}$

(3) n−1回のうち4回だけ表が出て、最後の1回で表が出ればよい。よってかくりつは、

$$P_n={}_{n-1}C_4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{{}_{n-1}C_4}{2^n}$$ となる。

(4)
$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{{}_nC_4}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{{}_{n-1}C_4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\cdot\frac{24}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$=\frac{n}{2(n-4)}$$ となる。ここで

$$\frac{n}{2(n-4)}<1 \iff n<2n-8$$
$$\iff 8<n$$ より、

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}<1\ (8<n),\quad \frac{P_{n+1}}{P_n}=1\ (8=n),\quad \frac{P_{n+1}}{P_n}>1\ (8>n)$$

となる。

よって

$P_1<P_2<\cdots<P_8=P_9 \to P_{10}>P_{11}>\cdots$

となるので、$n=8, 9$ のときに

P_n はmaxとなる

感想、出てくる4つは同じなのに、

(1)(2) と (3)(4) で

問題が全く別物になっている。

東北大 2020 [5] $t \in \mathbb{R}$ に対して $z = \dfrac{-1}{t+i}$

(1) $\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z$ をそれぞれ求めよ

(2) $\left|z - \dfrac{i}{2}\right|$ をもとめよ

(3) $-1 \leq t \leq 1$ のときの z の軌跡を図示せよ.

(1) $z = \dfrac{-1(t-i)}{(t+i)(t-i)} = \dfrac{-t+i}{t^2+1}$ より

$\mathrm{Re}\, z = \dfrac{-t}{t^2+1}$, $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{1}{t^2+1}$

(2) $\left|z - \dfrac{i}{2}\right| = \left|\dfrac{-t}{t^2+1} + \dfrac{2i}{2(t^2+1)} - \dfrac{(t^2+1)i}{2(t^2+1)}\right|$

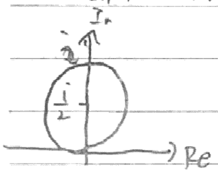
$= \left|\dfrac{-t}{t^2+1} + \dfrac{1-t^2}{2(t^2+1)} i\right|$

$= \sqrt{\dfrac{t^2}{(t^2+1)^2} + \dfrac{(1-t^2)^2}{4(t^2+1)^2}}$

$= \dfrac{1}{2(t^2+1)} \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1}$

$= \dfrac{t^2+1}{2(t^2+1)} = \dfrac{1}{2}$

(3) (2)より z は中心 $\dfrac{i}{2}$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円上にある. $\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z$ の はんいについて考えることで, zのはんいをもとめる.



$t = \tan\theta$ としたとき, $|\theta| \leq \dfrac{\pi}{4}$ と同値 このとき,

$\mathrm{Re}\, z = \dfrac{-\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = -\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

$\mathrm{Im}\, z = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta$ より.

$\varphi = 2\theta$ とおくと, $|\varphi| \leq \dfrac{\pi}{2}$ での

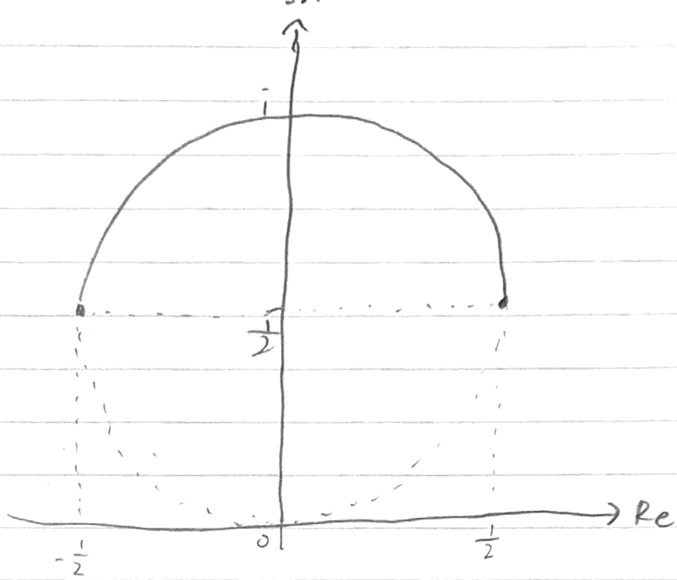
$\left(-\dfrac{1}{2}\sin\varphi, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\varphi\right)$ の軌跡と同じ.

よって $\mathrm{Im}\, \varphi$ は $\dfrac{1}{2} \leq \mathrm{Im}\, \varphi \leq 1$ である. 次に, $\dfrac{1}{2} \leq \mathrm{Im}\, \varphi \leq 1$ のとき, $-\dfrac{1}{2}\sin\varphi$ について 中間値の定理を使うことで, $-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ に 対応する φ がある. よって軌跡は

中心 $\dfrac{i}{2}$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の $\dfrac{1}{2} \leq \mathrm{Im}\, z \leq 1$ の部分

である.

図示すると



東北大2020 6 $A(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$

(1) $A(m,n)=A(n,m)$, $A(m+2,n)+A(m,n+2)=A(m,n)$ を示せ

(2) $A(m,1)$ を求めよ (3) $A(m,n+2)=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,n)$ を示せ (4) m, n が odd なら $A(m,n)\in\mathbb{Q}$ を示せ

---

(1) $y=\frac{\pi}{2}-x$ と置換

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m y\cdot\cos^n x\,dx$

より $A(m,n)=A(n,m)$

$A(m,n)-A(m,n+2)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x(1-\sin^2 x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx=\underline{A(m+2,n)}$ //

(2) $A(m,1)=A(1,m)$ (∵(1))

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos x\,dx$ $\sin x=u$ と置換 $\cos x\,dx=du$ より.

$=\int_0^1 u^m\cdot du=\underline{\frac{1}{m+1}}$ //

(3) $A(m,n+2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^{n+2}x\,dx$ (∵(1))

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^m x\cdot\cos x)\cdot\cos^{n+1}x\,dx$

$=\left[\frac{1}{m+1}\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\cdot(n+1)\cdot\cos^n x\cdot(-\sin x)\,dx$

$=\frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+1}x\cdot\cos^n x\cdot\sin x\,dx$

$=\frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+2}x\cos^n x\,dx$

$=\frac{n+1}{m+1}A(n,m+2)=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,n)$

(4) $A(m,n)=A(n,m)$ より. m が奇数の

ときだけ考えればよい. $m=2k+1$ ($k\geqq 0$ 整数)

$A(2k+1,n)=A(n,2k+1)$ より

n が奇数のときに帰着できる.

$A(m,n+2)=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,n)$.

$A(m,n)-A(m,n+2)=A(m+2,n)$

より. $A(m,n+2)=\frac{n+1}{m+1}\{A(m,n)-A(m,n+2)\}$

より $\frac{m+n+2}{m+1}A(m,n+2)=\frac{n+1}{m+1}A(m,n)$

よって $A(m,n+2)=\frac{n+1}{m+n+2}A(m,n)$

$\Rightarrow A(n,m+2)=\frac{m+1}{m+n+2}A(n,m)$

$\Rightarrow A(m+2,n)=\frac{m+1}{m+n+2}A(m,n)$.

$A(1,n)=A(n,1)=\frac{1}{n+1}$ より有理数

m: odd について. $A(m,n)\in\mathbb{Q}$ なら

$A(m+2,n)=\frac{m+1}{m+n+2}A(m,n)\in\mathbb{Q}$ より.

帰納的に

m: 全ての odd について.

$A(m,n)\in\mathbb{Q}$ となることが示された.

背景

ベータ関数の亜種

$B(n,m)=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$

$x=\sin^2\theta$ と置換 $[dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta]$ より

$=\int_0^1\sin^{2n}\theta\cdot\cos^{2m}\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$=2\int_0^1\sin^{2n+1}\theta\cos^{2m+1}\theta\,d\theta$

これはガンマ関数 (階乗の一般化) による

表記もできるので. ここから $\left(\frac{1}{2}\right)!$ とかも

求められる. 実際に求めると $\sqrt{\pi}$ が出てくる.