東工大2020 $\boxed{1}$

(1) $|x^2-x-23| \equiv 2 \pmod{3}$ なる $x\in\mathbb{Z}$

(2) $x_1 \sim x_1+k-1$ に x_k で $|x_j^2-x_j-23|$ が素数となる k の max と $x_1 \sim x_k$.

(1)
$x^2-x-23>0 \iff x<\frac{1-\sqrt{93}}{2},\ \frac{1+\sqrt{93}}{2}<x$

より $9<\sqrt{93}<10$ より

$-4\le x\le 5$ のとき, $x^2-x-23\le 0$

それ以外で $x^2-x-23>0$ となる.

(i) $-4\le x\le 5$ のとき,

$|x^2-x-23| = -x^2+x+23 \equiv 2 \pmod{3}$

より $x^2-x\equiv 0 \pmod{3}$ と同値.

よって, $x=-3,-2,0,1,3,4$

(ii) $x\le -5,\ 6\le x$ のとき,

$|x^2-x-23| = x^2-x-23 \equiv x^2-x+1 \equiv 2 \pmod{3}$

よって $x^2-x\equiv 1 \pmod{3}$ とならなければいけないが

そのような x はない.

よって(i)(ii)より

$x=-3,-2,0,1,3,4$

(2) $x\equiv 2 \pmod{3}$ のとき,

$x^2-x-23 \equiv x^2-x+1\equiv 0 \pmod{3}$ より,

$|x^2-x-23|$ は3の倍数.

$k\ge 3$ なら, どこかで3の倍数を通るので,

このときに素数になるためには

$|x_j^2-x_j-23|=3$ が必要.

(i) $x_j^2-x_j-23=3$

$x_j^2-x_j-26=0$

$x_j=\frac{1\pm\sqrt{105}}{2}$ より $x_j\notin\mathbb{Z}$.

(ii) $x_j^2-x_j-23=-3$

$x_j^2-x_j-20=0$

$(x_j-5)(x_j+4)=0$

$x_j=5,-4$

また, $x=6$ のとき $|x^2-x-23|=7$

$x=7$ のとき, $|x^2-x-23|=19$.

$x=4$ のとき, $|x^2-x-23|=11$

$x=3$ のとき, $|x^2-x-23|=17$

$x=-5$ のとき, $|x^2-x-23|=7$

$x=-6$ のとき $|x^2-x-23|=19$

$x=-3$ のとき $|x^2-x-23|=11$

$x=-2$ のとき $|x^2-x-23|=17$

より, 3〜7, −6〜−2 のとき

5連続で素数となる.

6連続以上のときは3でない3の倍数が出るので無理. 正の数はならないが −6を除く.

よって $k=5,\ (x_j)=(3,4,5,6,7)$.

東工大 $\boxed{2}$ $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ (1) $\triangle ABC$が正三角形 $\iff \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

(2) P: $\triangle ABC$の外接円上の点P. $AP^2+BP^2+CP^2$, $AP^4+BP^4+CP^4$ をもとめよ(R…外接円の半径)

(1) $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$が60°の関係にあるので,

$$\begin{cases} \gamma-\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}(\beta-\alpha), \text{ または} \\ \gamma-\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}(\beta-\alpha) \end{cases}$$ と同値

これは,

$$\left((\gamma-\alpha)-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}(\beta-\alpha)\right)\left((\gamma-\alpha)-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}(\beta-\alpha)\right)=0$$ と同値

$\iff (\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$

$\iff \alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2-\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha^2-2\beta\alpha+\beta^2=0$

$\iff \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$

(2). $A=(R,0)$, $B=\left(-\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$, $C=\left(-\frac{R}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}R\right)$

$P=(R\cos\theta, R\sin\theta)$ とおいても一般性を失わない.

このとき, $AP^2=R^2\{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\}$

$=R^2(2-2\cos\theta)$

$BP^2=R^2\left\{\left(-\frac{1}{2}-\cos\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta\right)^2\right\}$

$=R^2\left\{\frac{1}{4}+\cos^2\theta+\cos\theta+\frac{3}{4}+\sin^2\theta-2\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right\}$

$=R^2\{2+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\}$

$CP^2=R^2\left\{\left(-\frac{1}{2}-\cos\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta\right)^2\right\}$

$=R^2\left\{\frac{1}{4}+\cos^2\theta+\cos\theta+\frac{3}{4}+\sin^2\theta\sqrt{3}\sin\theta\right\}$

$=R^2(2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)$

より

$AP^2+BP^2+CP^2=R^2\{2-2\cos\theta+2+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta+2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\}$

$=\underline{6R^2}$

$AP^4=R^4(2-2\cos\theta)^2=R^4(4+4\cos^2\theta-8\cos\theta)$

$BP^4=R^4(2+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)^2$

$=R^4(4+\cos^2\theta+3\sin^2\theta+4\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\theta)$

$CP^4=R^4(2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2$

$=R^4(4+\cos^2\theta+3\sin^2\theta+4\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+4\sqrt{3}\sin\theta)$

よって

$AP^4+BP^4+CP^4$

$=R^4\{4+4\cos^2\theta-8\cos\theta+4+\cos^2\theta+3\sin^2\theta+4\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\theta+4+\cos^2\theta+3\sin^2\theta+4\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\}$

$=R^4\{12+6\cos^2\theta+6\sin^2\theta\}$

$=R^4\{12+6\}=\underline{18R^4}$

O(0,0,0) P(0,0,−2) H: PQRを通る平面 (2) QRSTが
A(3,0,0) 0<a<3 T: HとACの交点 同一円周上にある
B(0,3,0) 0<b<3 S: HとBCの交点 必要十分条件(a,b)で
Q(a,0,0) 表す
C(0,0,4) R(0,b,0) (1) S, Tの座標

東工大 2020 $\boxed{3}$

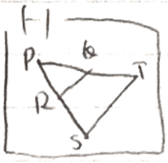
(1)
Hの方程式は $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{2}=1$ …①
ACの方程式は $y=0,\ \frac{x}{3}+\frac{z}{4}=1$ …②
BCの方程式は $x=0\ \frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ …③
T: ①かつ② より、
$\frac{x}{a}-\frac{z}{2}=1$ かつ $\frac{x}{3}+\frac{z}{4}=1$

よって $\frac{2x}{3}+\frac{x}{a}=3$. $x=\frac{3}{\frac{2}{3}+\frac{1}{a}}=\frac{3}{\frac{2a+3}{3a}}=\frac{9a}{2a+3}$

$z=4(1-\frac{x}{3})=4\{1-\frac{3a}{2a+3}\}=4\cdot\frac{3-a}{2a+3}$
$=\frac{12-4a}{2a+3}$

$T(\frac{9a}{2a+3},\ 0,\ \frac{12-4a}{2a+3})$
S: ①かつ③より $\frac{y}{b}-\frac{z}{2}=1$ かつ $\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$
これは Tのときと aとbを交換、x,yを交換すればいいから

$S:(0,\ \frac{9b}{2b+3},\ \frac{12-4b}{2b+3})$

(2) P, Q, R, S, TはH上にある。また、
P, R, Sは x座標=0 より直線上
P, Q, Tは y座標=0 より直線上にあり
よって図示すると  となる。

よって方べきの定理とその逆より
PQSTが同一円周上 ⇔ PR・PS = PQ・PT となる。

ここで、$\overrightarrow{PR}=(0,b,2)$ $\overrightarrow{PQ}=(a,0,2)$
$\overrightarrow{PS}=(0,\frac{9b}{2b+3},\frac{18}{2b+3})$, $\overrightarrow{PT}=(\frac{9a}{2a+3},0,\frac{18}{2a+3})$

より、$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{b^2+4}$, $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{a^2+4}$

$|\overrightarrow{PS}|=\frac{9}{2b+3}\sqrt{b^2+4}$, $|\overrightarrow{PT}|=\frac{9}{2a+3}\sqrt{a^2+4}$

となるため、

$\frac{b^2+4}{2b+3}=\frac{a^2+4}{2a+3}$ と同値。

$\frac{b^2+4}{2b+3}=\frac{(b^2+4)}{2(b+\frac{3}{2})}=\frac{(b+\frac{3}{2})(b-\frac{3}{2})+4+\frac{9}{4}}{2(b+\frac{3}{2})}$

$=\frac{2b-3}{4}+\frac{25}{4\cdot(2b+3)}$ となる。

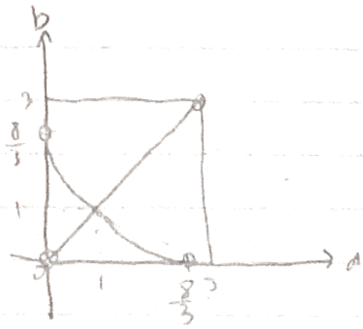
$f(x)=\frac{x^2+4}{2x+3}=\frac{2x-3}{4}+\frac{25}{4(2x+3)}$ とおくとき、
$\frac{25}{8(x+\frac{3}{2})}$

$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{25}{8}\frac{-1}{(x+\frac{3}{2})^2}$
$=\frac{1}{2}+\frac{25}{2}\frac{-1}{(2x+3)^2}$
$=\frac{1}{2}\{1-(\frac{5}{2x+3})^2\}$ で $0<x<3$ のとき、

$f'(x)$は $0<x<1$ で負、$1<x<3$ で正 より。
$f(x)$は  のようなグラフとなる。

$f(0)=\frac{4}{3}$, $f(3)=\frac{13}{9}$ より $f(0)<f(3)$

よって図にすると以下のようになる。

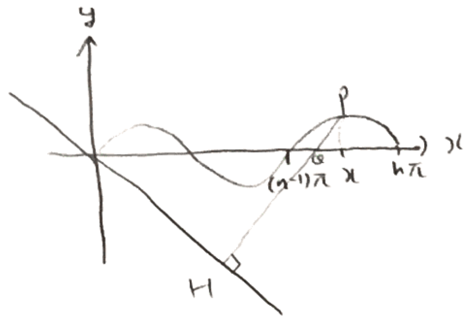


$\frac{x^2+4}{2x+3}=\frac{4}{3}$
$\Rightarrow x=0,\ \frac{8}{3}$

$(2a+3)(b^2+4)-(2b+3)(a^2+4)=0$
$2ab^2-2a^2b+3b^2-3a^2+8a-8b=0$
$2ab(b-a)+3(a+b)(b-a)-8(b-a)=0$
$(a-b)(4ab+6a+6b-16)=0$
$(a-b)\{(2a+3)(2b+3)-25\}=0$

東工大 2020 $\boxed{4}$ n: odd $y=\sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸 : D_n $\ell : x+y=0$ V_n : ℓ のまわりに D_n を回転させた回転体

(1) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$, $P=(x, \sin x)$ Q : P から ℓ に下ろした垂線と x 軸との交点
PQ を ℓ のまわりに回転させてできる図形の面積 (2) V_n の体積



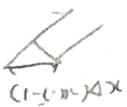
(1) P を通る直線 : $Y-\sin x = m(X-x)$
ℓ と直交より, $m=1$. よって
x 軸との交点は $Y = X - x + \sin x$
$Y=0$ より $Q=(x-\sin x, 0)$,
(注 : $n=1$ のとき, $x-\sin x \geqq 0$. それ以外も図形的に考えれば
Q が $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ の間にあることが分かる.)

線分 PQ と ℓ との交わりを H とおくこのとき,
$H=\left(\frac{x-\sin x}{2}, \frac{-x+\sin x}{2}\right)$ より,
$QH = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\sin x)$ $\overrightarrow{PQ} = (\sin x, \sin x)$
より $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2}\sin x$ より $PH = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+\sin x)$

より面積は

$$\frac{\pi}{2}\{(x+\sin x)^2 - (x-\sin x)^2\}$$
$$= \frac{\pi}{2}\{x^2 + \sin^2 x + 2x\sin x - x^2 - \sin^2 x + 2x\sin x\}$$
$$= 2\pi x \sin x$$

(2) Q $x \to x + \Delta x$ での変化は $1-\cos x$



より $x \sim x+\Delta x$ の厚さは $\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}$ よって

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} 2\pi x \sin x \cdot \frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}\,dx$$

$x \mapsto x-(n-1)\pi$ とおく

$$= \int_0^{\pi} 2\pi(x+(n-1)\pi)\sin x \frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\pi \int_0^{\pi} x\sin x(1-\cos x) + (n-1)\pi \sin x(1-\cos x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} x\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$
$$= \left[x\left(-\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x\right)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x\right)dx$$
$$= \pi\left(1+\frac{1}{4}\right) + \left[\sin x - \frac{1}{8}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{5}{4}\pi$$

$$\int_0^{\pi}(n-1)\pi \sin x(1-\cos x)\,dx$$
$$= (n-1)\pi \int_0^{\pi} \sin x(1-\cos x)\,dx$$
$-\cos x = u$. $\sin x\,dx = du$
$$= (n-1)\pi \int_{-1}^{1}(1+u)\,du$$
$$= (n-1)\pi \int_{-1}^{1} 1\,du = (2n-2)\pi$$

より, 合計すると

$$\frac{5}{4}\pi + (2n-2)\pi = \left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi$$

$\sqrt{2}\pi$ 倍すれば $|V_n|$ となる. よって.

$$\sqrt{2}\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi^2$$

東工大 2020 [5] $k\in\mathbb{N}$ $a_k=\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ (1) a_{k+2} を a_k で表せ。

(2) $\lim_{k\to\infty} ka_k = A$ (3) $\{k^m a_k - k^n A\}$ m,n,B (4) $\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$ p,q,r, 極限値

(1)
$$a_{k+2}=\int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$
$$=\left[\frac{-2}{\pi}(-)\left(\frac{\pi}{2}x\right)x^{k+1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{2(k+1)}{\pi}x^k\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$
$$=\frac{2(k+1)}{\pi}\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$
$$=\frac{2(k+1)}{\pi}\left\{\left[\frac{2}{\pi}x^k\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{2k}{\pi}x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\}$$
$$=\frac{2(k+1)}{\pi}\left\{\frac{2}{\pi}-0-\frac{2k}{\pi}a_k\right\}$$
$$=\frac{4(k+1)}{\pi^2}-\frac{4k(k+1)}{\pi^2}a_k$$

(2) $ka_k=b_k$ とする
$$(k+2)a_{k+2}=\frac{4(k+1)(k+2)}{\pi^2}-\frac{4k(k+1)(k+2)}{\pi^2}a_k$$
$$b_{k+2}=\frac{4(k+1)(k+2)}{\pi^2}-\frac{4(k+1)(k+2)}{\pi^2}b_k$$
より、$\frac{b_{k+2}}{(k+1)(k+2)}=\frac{4}{\pi^2}(1-b_k)$ で、
$$\frac{b_{k+2}}{(k+1)(k+2)}=\frac{a_{k+2}}{k+1}=\frac{1}{k+1}\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$
$$\leq\frac{1}{k+1}\int_0^1 x^{k-1}dx=\frac{1}{k(k+1)}\to 0\ (k\to\infty)$$
より、両辺の $k\to\infty$ の極限をとることで、

$\lim_{k\to\infty}\frac{4}{\pi^2}(1-b_k)=0$ となる。よって $\lim_{k\to\infty}b_k=1$

(3) $A=1$, $k^m a_k-k^n$
$$=k^{m-1}(ka_k-k^{n-m+1})$$
$k^{m-1}\to\infty$ より $ka_k-k^{n-m+1}\to 0$ でなくてはいけない

$ka_k\to 1$ より $k^{n-m+1}\to 1$, よって $\boxed{n=m-1}$

よって $=k^n(ka_k-1)$ (2)より
$$-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{b_{k+2}}{(k+2)(k+1)}=(b_k-1)\ \text{より}$$
$$k^n(ka_k-1)=-\frac{\pi^2}{4}\frac{k^n b_{k+2}}{(k+1)(k+2)}\quad n=2\text{のとき}$$
$$=-\frac{\pi^2}{4}\frac{k^2 b_{k+2}}{(k+1)(k+2)}\to-\frac{\pi^2}{4}\ (k\to\infty)\text{より}$$
$(n,m)=(2,3)$ のときに収束。それ以外は

0か∞に行くので ok.

今までのまとめ $a_k=\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$
$$(1-b_k)=\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

$$k^p a_k-k^q+\frac{\pi^2}{4}k^r$$
$$=k^{p-1}(b_k-k^{q-p+1})+\frac{\pi^2}{4}k^r$$
$$=k^{p-3}\left\{k^2(b_k-k^{q-p+1})+\frac{\pi^2}{4}k^{r-p+3}\right\}$$
$q=p-1$, $r=p-3$ とすると
$$=k^r\left\{k^2(b_k-1)+\frac{\pi^2}{4}\right\}$$
$$=k^r\cdot\frac{\pi^2}{4}\left\{1-\frac{k^2 b_{k+2}}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=k^r\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{k^2(1-b_k)+3k+2}{(k+1)(k+2)}\right\}\quad r=1\text{とすると}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}\frac{3+\frac{k^2(1-b_k)}{k}+\frac{2}{k}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)}\to\frac{3\pi^2}{4}\ (k\to\infty)$$
とりあえず $(p,q,r)=(4,3,1)$ のときに収束する。

それ以外のときは差を考えれば発散するので ok.

よって $(p,q,r)=(4,3,1)$ のときに極限 $\frac{3\pi^2}{4}$

論証むずかし〜〜 〜〜

どうせ (p,q,r) の組は1つだけやろwww~