$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} \quad (x \geqq 0)$ (1) $\max_{x \geqq 0} f(x)$ 阪大 2020 $\boxed{1}$

(2) $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to \infty} f'(x)$, (注: $\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$) (3) $y = f(x)$のグラフ

(凹凸は気にしなくてよい)

(1) $\log f(x) = \frac{\log(x+1)}{x+1}$ より 両辺微分すると.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1} - 1\cdot\log(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}$$

より $f'(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}$

ここで, $x \leqq e-1$ のとき, $f'(x) \geqq 0$

$x > e-1$ のとき, $f'(x) < 0$

より.

x	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

$f(x)$は $x = e-1$で maxとなる.

よって $\max_{x \geqq 0} f(x) = f(e-1) = e^{\frac{1}{e}}$

(2) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \exp\left(\frac{\log(x+1)}{x+1}\right)$

$= \exp\left(\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x+1)}{(x+1)}\right)$ ($\because$ exp: 連続)

$= \exp(0) = 1$

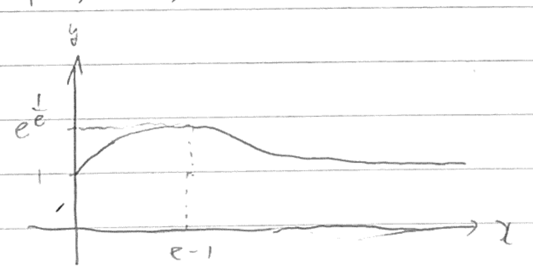
$\lim_{x \to \infty} f'(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}$

$= \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot \left\{ \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x+1)^2} - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x+1} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{\log(x+1)}{x+1} \right\}$

$= 1 \cdot \{ 0 - 0 \cdot 0 \} = 0$

(3)

$f(0) = 1$, $f(x) \to 1$ $(x \to \infty)$ より.



阪大 2020 [2]

$X_k = \begin{cases} 1 & \left(\frac{1}{6}\right) \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right) \\ -1 & \left(\frac{1}{6}\right) \end{cases}$ 確率変数. $Y_k = \exp\left(\frac{i\pi}{3}X_k\right)$, $Z_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k$

(1) $P(Z_2 \notin \mathbb{R})$

(2) $P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(Z_k \notin \mathbb{R})\right)$

(3) $p_n = P(Z_n \in \mathbb{R})$, p_n, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$

---

(1) $(X_1, X_2) = (1, -1), (0, 0), (-1, 1)$ のとき、$Z_2 \in \mathbb{R}$ となる。このときの確率は $\frac{1}{6^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

よって $Z_2 \notin \mathbb{R}$ となる確率は $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(2) $Z_k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A_k \left(:= \sum_{j=1}^{k} X_j\right) \equiv 0 \pmod 3$ である。

$Z_1 \notin \mathbb{R}$ のためには $X_1 = 1, -1$ が必要。また、

$Z_k \notin \mathbb{R}$ なら $A_k \bmod 3 = 1, 2$ である。

$A_k \bmod 3 = 1$ ならば、$X_{k+1} \neq -1$ であることが $A_{k+1} \notin \mathbb{R}$ となる必要十分条件。さらに、

$A_k \bmod 3 = 2$ ならば、$A_{k+1} \notin \mathbb{R} \Leftrightarrow X_{k+1} \neq 1$

となる。よって $a_n := P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(Z_k \notin \mathbb{R})\right)$ とおくと、

$a_{n+1} = \frac{5}{6} a_n$, $a_1 = \frac{1}{3}$ となる。

よって a_n は初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列なので、$a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

(3) $p_n : P(A_n \equiv 0 \pmod 3)$

$q_n : P(A_n \equiv 1 \pmod 3)$

$r_n : P(A_n \equiv 2 \pmod 3)$

とする。このとき $p_n + q_n + r_n = 1$,

$(p_1, q_1, r_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ である。

このとき、

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n$$
$$q_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{2}{3}q_n + \frac{1}{6}r_n$$
$$r_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{2}{3}r_n$$

より、$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n)$ より

$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}$ より、

$\left(p_{n+1} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$ となる。

よって $\{p_n - \frac{1}{3}\}$ は初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列なので $p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって $p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

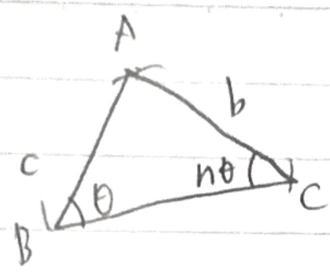
より、

$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3}$

P.S. 数年前（2013〜2018, 2020は学部指定）の京大でよく出てきそうな問題です。

$n\in\mathbb{N}_{\ge 2}$ で △ABC において AB$=c$, CA$=b$, $\angle ACB = n\angle ABC$ のとき, $c<nb$ を示せ.

阪大 2020 $\boxed{3}$



$\angle ABC=\theta$ とおく.

このとき, $n\theta+\theta<\pi$ より

$\theta<\frac{\pi}{n+1}\le\frac{\pi}{3}$ である.

また, 正弦定理より

$\frac{c}{\sin n\theta}=\frac{b}{\sin\theta}$ より, $c=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cdot b$

ここで, $nb-c=nb-\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cdot b$

$=\frac{b}{\sin\theta}(n\sin\theta-\sin n\theta)$ よって

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ より $\sin\theta>0$, $b>0$ より,

$n\sin\theta-\sin n\theta\ge 0$ が $0<\theta<\frac{\pi}{n+1}$

で成立することを示せば十分である.

これを n についての帰納法で示す.

(i) $n=2$ のとき,

$n=2$ のとき,

$2\sin\theta-\sin 2\theta=2\sin\theta(1-\cos\theta)\ge 0$

($\because\theta<\frac{\pi}{2}$) より成立する.

(ii) $\exists n\in\mathbb{N}$ で成立していると仮定

このとき, $(n+1)\sin\theta-\sin((n+1)\theta)$

$=n\sin\theta+\sin\theta-\sin(n\theta)\cos\theta-\cos(n\theta)\cdot\sin\theta$

$=n\sin\theta-\sin(n\theta)+(1-\cos\theta)\cdot\sin n\theta+(1-\cos(n\theta))\cdot\sin\theta$

$0<\theta<\frac{\pi}{n+2}$ のとき, $0<\theta<\frac{\pi}{n+1}$ より $\sin n\theta>0$, $\cos n\theta<1$ より

$\ge n\sin\theta-\sin(n\theta)\ge 0$ ($\because$ 仮定) となる.

よって数学的帰納法より,

$n\sin\theta-\sin(n\theta)\ge 0$ ($n\ge 2$) が成立するため,

$c<nb$ も成立する.

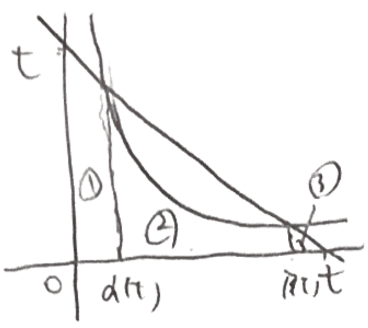
阪大 2020 $\boxed{4}$ $S(t)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ xy\leq 1,\ x+y\leq t\}$ の面積としたとき,

$\lim_{t\to\infty}(S(t)-2\log t)$ を求めよ

$t\geq 2$ のときだけ考えてもOKである($t\to\infty$ にするので)

$\alpha(t), \beta(t)$ を $x+y=t$ と $xy=1$ の共有点の x 座標(ただし $\alpha(t)<\beta(t)$)とおく

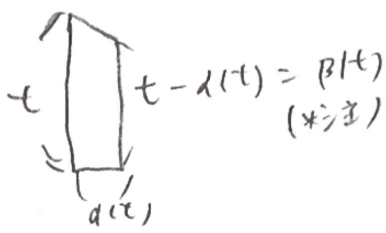
このとき, 図にすると以下のようになる



このとき,

$S(t)=$ (①のめんせき) $+$ (②のめんせき) $+$ (③のめんせき) である

①の面積: 台形なので

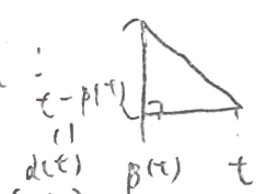


より. $\frac{1}{2}\{t+\beta(t)\}\cdot\alpha(t)$.

②の面積 $\frac{1}{x}$ を $\alpha(t)$ から $\beta(t)$ まで積分

よって $\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{dx}{x}=\log\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}$

③の面積:



の直角三角形なので.

$\frac{1}{2}(t-\beta(t))\cdot\alpha(t)$.

よって ①②③より.

$S(t)=\frac{1}{2}(t+\beta(t))\cdot\alpha(t)+\log\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}+\frac{1}{2}(t-\beta(t))\cdot\alpha(t)$

$=t\cdot\alpha(t)+\log(\beta(t))^2$ (*2)

$=t\alpha(t)+2\log\beta(t)$ ここで, t は十分大のとき,

(*1)より. $\alpha(t), \beta(t)=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$ で, $\alpha(t)<\beta(t)$ より.

$\alpha(t)$ $\alpha(t)=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$, $\beta(t)=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$ で

あるため,

$S(t)=t\cdot\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$ となる.

(*1: $\alpha(t), \beta(t)$ は 2次方程式 $\lambda^2-t\lambda+1=0$ の解なので 解と係数の関係より, $\alpha(t)+\beta(t)=t$, $\alpha(t)\beta(t)=1$ となる)

よって $S(t)-2\log t$

$=t\cdot\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2t}$

$=t\cdot\frac{t^2-(t^2-4)}{2(t+\sqrt{t^2-4})}+2\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}{2}$

$=\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}+2\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}{2}$

$\xrightarrow[t\to\infty]{}\frac{2}{1+1}+2\log\frac{1+1}{2}=1$

より,

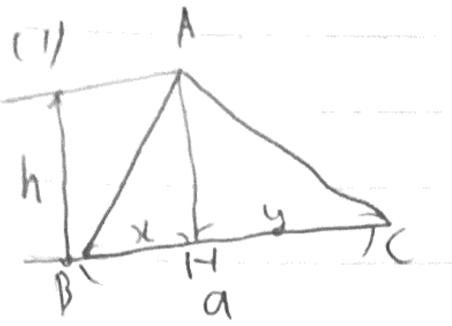
$\lim_{t\to\infty} S(t)-2\log t=1$ //

阪大2020 $\boxed{5}$ △ABC $a+b+c=2$ BC$=a$, CA$=b$ (AB$=c$) V: △ABCをBCを軸として回転させた回転体の体積

(1) aをfixしてbを変化させたとき, Vは $b=c$のとき maxとなることを示せ

(2) a, bを動かしたときのVのmaxとそのときの a, bの値を求めよ

(1)



AからBCへ下ろした垂線の足をH, AH$=h$, BH$=x$, CH$=y$とおく

このとき, BCを軸に回転させたときの回転体は円すいを底面でくっつけたものになる.

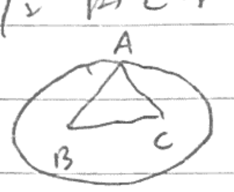
よってこのとき,

$$V = \pi h^2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} + \pi h^2 \cdot y \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^2 (x+y) = \frac{1}{3}\pi h^2 a$$ となる.

よって. Vを最大化するためには hの最大化を考えればよいことになる.

aをfixしてbを動かしたとき, $b+c=2-a$: const より. Aの軌跡はだ円となる (焦点がB, Cとなる)



Aが長半径に対して最も遠くなるとき, hはmaxとなる.

よって. AHが短半径になるとき, hはmaxとなる. このとき, BH$=$CHより. 三平方の定理より AB$=$ACとなる.

(2) $b=c$となるとき, $a+2b=2$より

$b=1-\frac{a}{2}$となる. このとき

$$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(1-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$=\sqrt{1-a}$ となる. よって

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{1-a}\right)^2 \cdot a = \frac{1}{3}\pi(1-a)a$$

となる (∵三角不等式より $a<1$より $1-a>0$)

$\frac{dV}{da} = \frac{1}{3}\pi(1-2a)$, $\frac{d^2V}{da^2} = \frac{-2\pi}{3} < 0$ より

$1-2a=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$ のとき, Vはmax

よって

$\max V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12}$

a,b