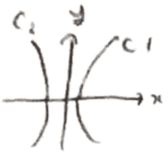
名古屋大2020 $\boxed{1}$

$x^2-y^2=1$ $C_1\ x>0$ $C_2\ x<0$



(1) $ax-by=1$ が C_1, C_2 といずれも交わる a, b の条件

(2) a, b は(1)の条件を満たす
$A(a,b)$ $ax-by=1$ と C_1, C_2 の交点をそれぞれ P, Q
$\triangle APQ$ の面積 $S(a,b)$

(3) $\min_{a,b} S(a,b)$ と $\operatorname{argmin}_{a,b} S(a,b)$

(1) $by=ax-1$ で、$b=0$ のとき、x軸に平行なので x座標不変より、高々1個しか交点をもてない。よって $b\neq0$ としてよい。

よって $y=\dfrac{ax-1}{b}$ これを $x^2-y^2=1$ に代入すると

$x^2-\dfrac{a^2x^2-2ax+1}{b^2}=1$ より、交点のx座標は

$(b^2-a^2)x^2+2ax-1-b^2=0$

$b^2-a^2=0$ のとき 一次方程式なので解が2個じゃないのでダメ。

よって $b^2-a^2\neq0$ より判別式 >0 が必要 より

$a^2-(-1-b^2)(b^2-a^2)>0$
$a^2+(1+b^2)(b^2-a^2)>0$
$a^2+b^4-a^2b^2-a^2+b^2>0$
$b^2(b^2-a^2+1)>0$ より $1>a^2-b^2$

また、解と係数の関係より 積 <0 でなくてはいけない

よって $\dfrac{-1-b^2}{b^2-a^2}<0$ より 場合分け
$\Leftrightarrow \dfrac{1+b^2}{b^2-a^2}>0$

(i) $1>a^2-b^2>0$ のとき,
$1+b^2<0$ より ダメ

$0>a^2-b^2$ のとき
$\dfrac{1+b^2}{b^2-a^2} \Leftrightarrow 1+b^2>0$ より OK

よって $b^2-a^2>0$ ($|b|>|a|$ のときに) 条件をみたす。このとき交点のx座標は

$x^2+\dfrac{2a}{b^2-a^2}x-\dfrac{(1+b^2)}{b^2-a^2}=0$

以降 解を α, β とする
($\alpha>0>\beta$)

(2) $A:(a,b)$ $P:\left(\alpha, \dfrac{a\alpha-1}{b}\right)$
$Q\ \left(\beta, \dfrac{a\beta-1}{b}\right)$

より $\overrightarrow{AP}=\left(\alpha-a, \dfrac{a}{b}\alpha-\dfrac{1+b^2}{b}\right)$
$\overrightarrow{AQ}=\left(\beta-a, \dfrac{a}{b}\beta-\dfrac{1+b^2}{b}\right)$

より $S(a,b)=\left|\dfrac{1}{2}\left\{(\alpha-a)\left(\dfrac{a}{b}\beta-\dfrac{1+b^2}{b}\right)-(\beta-a)\left(\dfrac{a}{b}\alpha-\dfrac{1+b^2}{b}\right)\right\}\right|$

$\left|\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{a}{b}\alpha\beta-\dfrac{a^2}{b}\beta-\dfrac{1+b^2}{b}\alpha+\dfrac{a(1+b^2)}{b}-\dfrac{a}{b}\alpha\beta+\dfrac{a^2}{b}\alpha+\dfrac{1+b^2}{b}\beta-\dfrac{a(1+b^2)}{b}\right\}\right|$

$=\left|\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{a^2}{b}(\alpha-\beta)-\dfrac{1+b^2}{b}(\alpha-\beta)\right\}\right|$

$=\left|\dfrac{a^2-b^2-1}{2b}(\alpha-\beta)\right|$

$\dfrac{1+b^2-a^2}{2|b|}\cdot\sqrt{\left\{\dfrac{4a^2}{(b^2-a^2)^2}+\dfrac{4(1+b^2)}{b^2-a^2}\right\}}$

$=\dfrac{1+b^2-a^2}{2|b|}\sqrt{\dfrac{4\{a^2+(1+b^2)(b^2-a^2)\}}{(b^2-a^2)^2}}$ $(a^2+b^2+b^4-a^2-a^2b^2)$

$=\dfrac{(1+b^2-a^2)\cdot2|b|\sqrt{1+b^2-a^2}}{2|b|(b^2-a^2)}=\dfrac{(1+b^2-a^2)^{3/2}}{b^2-a^2}$

$b^2-a^2=X$ $X>0$ で

$S=\dfrac{(1+X)^{3/2}}{X}$ $\dfrac{dS}{dX}=\dfrac{(X-2)\sqrt{X+1}}{2X^2}$

$0<X\leq2$ $\dfrac{dS}{dX}<0$ $2<X$, $\dfrac{dS}{dX}>0$

$X=2$ で min よって $\min S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

argmin は $b^2-a^2=2$

名古屋大 2020 $\boxed{2}$ $2,\ m^2+1,\ m^4+1$ 素数 (1) $\{a,b,c\}=\{2, m^2+1, m^4+1\}$ $a^2<bc$

(2) $(x+y)(x^2+2y^2+2xy)=2(m^2+1)(m^4+1)$ のときの x, y. x, y は正

---

(1) $a=2$ のとき, $4<(m^2+1)(m^4+1)$ $m\geq 2$ (常に成り立つより)

$a=m^2+1$ のとき,

$(m^2+1)^2<2(m^4+1)$ $m\geq 2$

$m^4+2m^2+1<2(m^4+1)$

$0<(m^2-1)^2$

$a=m^4+1$ のとき, $m=1$ はNo

$(m^4+1)^2<2(m^2+1)$ $m\geq 2$ のとき,

$2(m^2+1)\leq 4m^2$

$m^4+1\leq 2m^2\leq 2m^2$ が成立. より,

$(m^2-1)^2\leq 0$ が成立. $m\geq 2$ に反

より $a=m^4+1$ のときは不成立.

$m=1$ のときは $m^2+1=m^4+1$ より不適.

よって $a=2,\ m^2+1$

(2) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$<x^2+2xy+2y^2$

$(x+y)=2(m^2+1)$ のとき,

$m^4+1-4(m^2+1)^2=m^4+1-4m^4-8m^2-4$

$=-3m^4-8m^2-3\leq 0$

$(m^4+1)\leq 4(m^2+1)^2$ より不適

$x+y\geq 2$ (x, y 正) より

$x+y=2,\ m^2+1$

(i) $x+y=2$ のとき, $x=y=1$

$x^2+2y^2+2xy=5=(m^2+1)(m^4+1)$

これをみたす m はない

(ii) $x+y=m^2+1$ のとき,

$(x+y)^2=(m^2+1)^2=m^4+2m^2+1$

$x^2+2y^2+2xy=2(m^4+1)=2m^4+2$

$y^2=(m^2-1)^2$ より $y=m^2-1$

$x=2$

(i)(ii)より

$(x, y)=(2,\ m^2-1)$

九州大 2020 ③ $F(x)=f(x)-f(\pi-x)-f(\pi+x)+f(2\pi-x)$

$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ (1) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で $F(x)\geqq 0$ (3) $\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx$

$f''(x)>0$ (2) $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx\geqq 0$ $(g'(x)<0)$

(1) $\frac{dF}{dx}=f'(x)+f'(\pi-x)-f'(\pi+x)-f'(2\pi-x)$

$=f'(x)-f'(\pi+x)+f'(\pi-x)-f'(2\pi-x)$

$f''>0$ より、f' は単調増加だから よって $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において、

$x\leqq\pi+x$, $\pi-x\leqq 2\pi-x$ より

$\leqq 0$

よって F は単調減少

$F(x)\geqq F(\frac{\pi}{2})$

$F(\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})-f(\frac{\pi}{2})-f(\frac{3\pi}{2})+f(\frac{3\pi}{2})$

$=0$ より $F(x)\geqq 0$.

(2) $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx$

$+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\cos x\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-x)\cos x\,dx$

$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+\pi)\cos x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi-x)\cos x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx\geqq 0$

(3) $\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx$ …①

$G(x)=-\int_0^{x} g(t)\,dt$ とすると、

① $=\left[G(x)\sin x\right]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx$

$=\int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx$

このとき、$G'(x)=-g(x)$

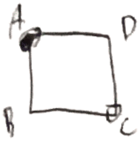
$G''(x)=-g'(x)>0$ より

(2)について、$f=G$ とおけば、$f''>0$ より

$\int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx=\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx\geqq 0$

〈答〉

名古屋大2020 $\boxed{4}$
ゲームするやつ



●先　○後

n6サイコロ　$\frac{1}{3}$ +1　$\frac{1}{3}$ −1　$\frac{1}{3}$ 0

重なったら終了

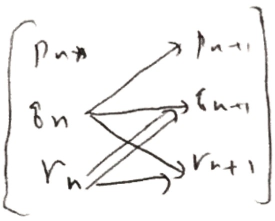
2nできのまんくを除す

p_n：ちょうどn回で決まる

(1) p_2 p_3　(2) p_n　(3) $\sum_{n=1}^{[\frac{N}{2}]} p_{2n-1} < \sum_{n=1}^{[\frac{N}{2}]} p_{2n}$ を示せ

---

p_n：n回後にきまるかくりつ
q_n：n回後にとなり合っているかくりつ
r_n：n回後に反対側にあるかくりつ



$p_{n+1} = \frac{1}{3} q_n$
$q_{n+1} = \frac{1}{3} q_n + \frac{2}{3} r_n$
$r_{n+1} = \frac{1}{3} q_n + \frac{1}{3} r_n$

$p_0 = 0$
$q_0 = 0$
$r_0 = 1$

$p_{n+1} + q_{n+1} - 2r_n = \frac{2}{3}q_n + \frac{2}{3}r_n - \frac{2}{3}q_n - \frac{2}{3}r_n = 0.$

より $p_n + q_n = 2r_n \ (n \geqq 1)$ 代入すると

$p_1 = 0$
$q_1 = 2/3$
$r_1 = 1/3$

で，$p_{n+1} = \frac{1}{3} q_n$
$q_{n+1} = \frac{2}{3} q_n + \frac{1}{3} p_n$

$\boxed{p_2 = 2/9}$ (1)
$q_2 = 4/9$
$r_2 = 3/9$

$\boxed{p_3 = 4/27}$ (1)
$q_3 = 10/27$
$r_3 = 7/27$

$p_{n+2} = \frac{1}{3} q_{n+1}$
$= \frac{2}{9} q_n + \frac{1}{9} p_n$
$= \frac{2}{3} p_{n+1} + \frac{1}{9} p_n$

より $p_{n+2} - \frac{2}{3} p_{n+1} - \frac{1}{9} p_n = 0$

$c^2 - \frac{2}{3}c - \frac{1}{9} = 0$ の解は $c = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{3}$

$\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$，$\beta = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$ とおくと，$\alpha+\beta = \frac{2}{3}$，$\alpha\beta = -\frac{1}{9}$

$p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$
$(p_{n+1} - \alpha p_n) = \beta^{n-1}(p_2 - \alpha p_1)$ …①
$p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n)$
$(p_{n+1} - \beta p_n) = \alpha^{n-1}(p_2 - \beta p_1)$ …②

②−①より
$(\alpha - \beta) p_n = \alpha^{n-1}(p_2 - \beta p_1) - \beta^{n-1}(p_2 - \alpha p_1)$
$\frac{2\sqrt{2}}{3} p_n = \frac{2}{9}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})$

$p_n = \frac{\sqrt{2}}{6}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})$

$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}$ (2)

$\alpha - \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9}$
$\frac{14}{27}$

(3) $N \in \mathbb{N}$ について，

$\sum_{n=1}^{N} p_n (-1)^{n-1} < 0$ を示せばよい

$\parallel$

$\frac{\sqrt{2}}{6} \sum_{n=1}^{N} \{(-\alpha)^{n-1} - (-\beta)^{n-1}\}$

$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\frac{1-(-\alpha)^N}{1+\alpha} - \frac{1-(-\beta)^N}{1+\beta}\right\}$

$= \frac{\sqrt{2}\{(1+\beta)(1-(-\alpha)^N) - (1+\alpha)(1-(-\beta)^N)\}}{6\underbrace{(1+\alpha)(1+\beta)}_{=1+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{14}{9}}}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{28}\left\{\beta - \alpha - \frac{4-\sqrt{2}}{3}(-\alpha)^N + \frac{4+\sqrt{2}}{3}(-\beta)^N\right\}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{28}\left\{(\beta - \alpha) - (-1)^N\left\{\frac{4-\sqrt{2}}{3}\alpha^N - \frac{4+\sqrt{2}}{3}\beta^N\right\}\right\}$

$= -\frac{3\sqrt{2}}{28}\left\{\frac{2\sqrt{2}}{3} + (-1)^N \left\{\frac{4-\sqrt{2}}{3}\alpha^N - \frac{4+\sqrt{2}}{3}\beta^N\right\}\right\}$

~~$N \geqq 3$ のとき成立を示す.~~

$\frac{4}{3}(\alpha^N - \beta^N) - \frac{\sqrt{2}}{3}(\alpha^N + \beta^N)$

$\left|\frac{2\sqrt{2}}{3} + (-1)^N \frac{4}{3}(\alpha^N - \beta^N) - (-1)^N \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}(\alpha^N + \beta^N)\right|$

$\geqq \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3}|\alpha^N - \beta^N| - \frac{\sqrt{2}}{3}|\alpha^N + \beta^N|$

$\geqq \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4+\sqrt{2}}{3}\{|\alpha|^N + |\beta|^N\}$

$\geqq \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4+\sqrt{2}}{3}\{|\alpha|^3 + |\beta|^3\}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4+\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{14}{27} = \frac{54\sqrt{2} - 56 - 14\sqrt{2}}{81} = \frac{40\sqrt{2} - 56}{81} > 0$

より $N \geqq 3$ ではOK．また，

$p_2 = \frac{2}{9}$　$p_1 = 0$
$p_3 = \frac{4}{27}$ で，$p_2 > p_1$ より
$N = 2$ もOK．

よって $N \geqq 2$ で不等式は成立する．