九州大 2020 [1]

$(a, 0)$を通り, $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する接線があるような a のはんい

$(a, 0)$を通る直線は

$y = m(x-a) = mx - ma$ とおける.

$y = e^{-x} - e^{-2x}$ $(= f(x))$ の $(t, f(t))$ での接線は

$y - f(t) = f'(t)(x - t)$

$y = f'(t)x - tf'(t) + f(t)$

$\therefore y = (-e^{-t} + 2e^{-2t})x + e^{-t} - e^{-2t} + te^{-t} - 2te^{-2t}$

よって $m = f'(t)$, $ma = tf'(t) - f(t)$

ここで, $f'(t) = 2(e^{-t})^2 - e^{-t}$
$= (2e^{-t} - 1)e^{-t}$ より

$e^{-t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \log 2$ のとき,

$m = f'(t) = 0$ となるが, このとき, $ma = -\frac{1}{4} \neq 0$ より不適. 以降は $f'(t) \neq 0$, $t \neq \log 2$ のときを考える.

このとき, $a = \frac{tf'(t)}{f'(t)} - \frac{f(t)}{f'(t)}$

$= t - \frac{f(t)}{f'(t)} = t + \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{2e^{-2t} - e^{-t}}$

$= t + \frac{e^t - 1}{e^t - 2} =: g(t)$ とおく.

$g'(t) = 1 + \frac{(e^t - 2)e^t - e^t(e^t - 1)}{(e^t - 2)^2}$

$= 1 + \frac{e^t\{e^t - 2 - e^t + 1\}}{(e^t - 2)^2}$

$= \frac{(e^t - 2)^2}{(e^t - 2)^2} + \frac{-e^t}{(e^t - 2)^2}$

$= \frac{e^{2t} - 5e^t + 4}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 1)(e^t - 4)}{(e^t - 2)^2}$

より $t = 0$, $t = 2\log 2$ のときに

$g'(t) = 0$ となる.

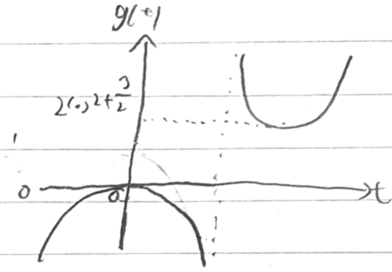
g の増減表をかくと

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	×	$-$	0	$+$
	↗	極大	↘		↘	極小	↗

$\lim_{t \to \log 2 + 0} g(t) = +\infty$, $\lim_{t \to \log 2 - 0} g(t) = -\infty$

かつ $g(0) = 0$, $g(2\log 2) = 2\log 2 + \frac{3}{2}$

より $g(t)$ のグラフをかくと



よって $a = g(t)$ となる t が存在すれば a は条件をみたす.

よって $g(\mathbb{R} \setminus \{\log 2\})$ を考えればよくて.

条件をみたす a のはんいは

$a \leq 0$, $2\log 2 + \frac{3}{2} \leq a$ //

九州大 2020 [2] $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $i=\sqrt{-1}$, $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ は $f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0$ をみたす (1) c,d を a,b で表せ (2) $f(1) \bmod 7=1$ $f(1) \bmod 11=10$ $f(-1) \bmod 7=3$, $f(-1) \bmod 11=10$ $|a|,|b|\leq 40$ のとき, $f(x)=0$ の解を求めよ.

1) f は実数係数なので, $f\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=0$ となる.

よって因数定理より $\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=x^2-x+1$ で割りきれる.

$f(x)$ を x^2-x+1 でわる

$$
\begin{array}{r}
x^2+(a+1)x+(a+b) \\
x^2-x+1 \,\big)\, x^4+ax^3+bx^2+cx+d \\
x^4-x^3+x^2 \\
\hline
(a+1)x^3+(b-1)x^2+cx \\
(a+1)x^3-(a+1)x^2+(a+1)x \\
\hline
(a+b)x^2+(c-a-1)x+d \\
(a+b)x^2-(a+b)x+(a+b) \\
\hline
(c-a-1+a+b)x \quad d-a-b
\end{array}
$$

① ②がともに0にならない.

よって $c+b-1=0$, $d-a-b=0$ より,

$c=-b+1$, $d=a+b$ となる.

(2) $f(x)=(x^2-x+1)(x^2+(a+1)x+(a+b))$

$f(1)=1+a+1+a+b=2a+b+2$

$f(-1)=3(1-a-1+a+b)=3b$

中国剰余定理より $(\bmod 7, \bmod 11)=(1,10)$
$(3,10)$

となるものが $\bmod 77$ で一意に存在する.

よって $(\bmod 7, \bmod 11)=(1,10)$ となるのは $43 \pmod{77}$

$(\bmod 7, \bmod 11)=(3,10)$ となるのは $10 \pmod{77}$

よって $2a+b+2\equiv 43 \pmod{77}$ …①

$3b\equiv 10 \pmod{77}$ …②

3は77と互いに素なので $b\equiv 10(3^{-1}) \bmod 77$

ただし 3^{-1} は $\bmod 77$ での3の逆元. よって

$b\equiv 29 \pmod{77}$.

$|b|\leq 40$ より, $b=29$.

よって $2a+31\equiv 43 \pmod{77}$

より $2a\equiv 12 \pmod{77}$

$2(a-6)\equiv 0 \pmod{77}$

2と77は互いに素なので,

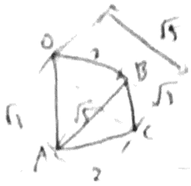
$a\equiv 6 \pmod{77}$ $|a|\leq 40$ より $a=6$

よって $f(x)=(x^2-x+1)(x^2+7x+35)$

より, $x^2+7x+35=0$ または $x^2-x+1=0$ より

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{91}i}{2}, \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である.

九州大 2020 [3]



l: OAの中点とBCの中点を通る　l⊥m
m: OBの中点とCAの中点を通る　m⊥n
n: OCの中点とABの中点を通る　n⊥l

(1) OBとCAのなす角θ
(2) 四面体OABCの4つの頂点を通る球の半径

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする

このとき, lの向きは $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

mの向きは $-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

nの向きは $-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

l⊥mより $(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

$=-|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$

$-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$=-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{c}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=0$ より $OC=AB=\sqrt{5}$

同様にして m⊥n, n⊥lより

$|\vec{a}|^2-|\vec{b}-\vec{c}|^2=0$, $|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{c}|^2=0$ より

$OB=AC=2$　$OA=BC=\sqrt{3}$　また,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2}{2}=\dfrac{3+4-5}{2}=1$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2}{2}=\dfrac{4+5-3}{2}=3$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{2}=\dfrac{5+3-4}{2}=2$

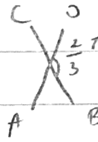
$|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=1-3=-2$

$\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{-2}{2\cdot 2}=-\dfrac{1}{2}$

よりなす角は $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ より $\left(\theta=\frac{2}{3}\pi\right)$



$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ の方を答えとするので

なす角 $\boxed{\theta=\frac{\pi}{3}}$

(2) ABの中点とOCの中点の中点をDとおくと

$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

$\overrightarrow{OD}\cdot\vec{a}=\dfrac{|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}}{4}=\dfrac{3+1+2}{4}=\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{OD}\cdot\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}}{4}=\dfrac{1+4+3}{4}=2$

$\overrightarrow{OD}\cdot\vec{c}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2}{4}=\dfrac{2+3+5}{4}=\dfrac{5}{2}$

また,

$|\overrightarrow{OD}|^2=\overrightarrow{OD}\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OD}\cdot\vec{a}+\overrightarrow{OD}\cdot\vec{b}+\overrightarrow{OD}\cdot\vec{c})$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}\right)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

ここで

$|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$

$=\frac{3}{2}+3-2\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

$|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$

$=\frac{3}{2}+4-2\cdot 2=\frac{3}{2}$

$|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=\frac{3}{2}+5-2\cdot\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$

より $|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$ となる

よってDは四面体OABCの外心

逆に外心が2つ以上あることは無い。
(△ABCの外心を通りABCと垂直な直線と
△OABの外心を通りOABと垂直な直線を
同時に通らなければいけない。よって外心は
存在しても1つだけである)

よって外接球も1通りだけであり

その半径は $\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}$ //

背景: 等面四面体

九州大2020[4]
4つのサイコロ 積X　(1) Xが25の倍数となるかくりつ (2) Xが4 ; (3) X が100 ;

(1) 5が2回以上出ることと同値.

よって $\underbrace{6\cdot\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}}_{5が2個}+\underbrace{4\cdot\frac{1}{6^3}\cdot\frac{5}{6}}_{5が3個}+\underbrace{1\cdot\frac{1}{6^4}}_{5が4個}$

$=\frac{150}{1296}+\frac{20}{1296}+\frac{1}{1296}=\frac{171}{1296}$

$=\frac{19}{144}$ //

(2) 1−奇数になる確率−2で1回だけ割れるかくりつ

となる.

奇数になるかくりつ：全て1, 3, 5より.

$\left(\frac{3}{6}\right)^4=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

2で1回わりきれるかくりつ：2 or 6が1回だけ.

あとは1, 3, 5だけなので.

${}_4C_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^3=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{6}$

よって 4でわり切れるかくりつは

$1-\frac{1}{16}-\frac{1}{6}=\frac{48-3-8}{48}=\frac{37}{48}$

(3) 5が2回でて、残りの2個の積が4の倍数でなくてはいけない. この残りの2つくみあわせは

(4, x), (2 or 6, 2 or 6) の組みあわせである.

① x = 1, 2, 3, 6 のとき, (4, x, 5, 5) となるかくりつ

$4\cdot\frac{1}{6^4}\cdot\frac{4!}{2!1!1!}=\frac{48}{1296}=\frac{1}{27}$

② (4, 4, 5, 5)

$\frac{1}{6^4}\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}=\frac{6}{1296}=\frac{1}{216}$

③ (4, 5, 5, 5)

$\frac{1}{6^4}\cdot{}_4C_1=\frac{1}{324}=\frac{4}{1296}$

④ (2, 2, 5, 5)

$\frac{1}{6^4}\cdot\frac{4!}{2!2!}=\frac{6}{1296}=\frac{1}{216}$

⑤ (6, 6, 5, 5) : $\frac{6}{1296}=\frac{1}{216}$

⑥ (2, 6, 5, 5)

$\frac{1}{6^4}\cdot\frac{4!}{2!1!1!}=\frac{12}{1296}=\frac{1}{108}$.

よって①〜⑥を合計すればいいので

$\frac{48+6+4+6+6+12}{1296}=\frac{82}{1296}=\frac{41}{648}$ //

九州大 2020 [5]

D: $\{(x,y,z) \mid x^2+(y-2)^2 \leq 1,\ z=0\}$

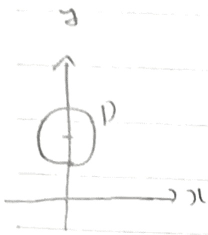
E: Dを底面とし $z \geq 0$ の部分にある高さ3の直円柱（内部を含む）

$(0,2,2)$とx軸を含む平面でEをカットしてDを含む方をT

(1) $-1 \leq t \leq 1$ $x=t$で Tを切ったときの断面積

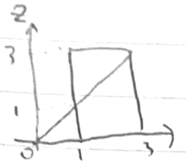
(2) Tをx軸で1回転させてできた立体の体積

(1)



$(0,2,2)$とx軸を含む平面の方程式

$\rightarrow y-z=0$



Eの領域は

$x^2+(y-2)^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3$

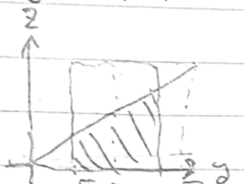
Tの領域は さらに

$y \geq z$ を追加したもの

$x=t$のときは $(y-2)^2 \leq 1-t^2$ より断面は

$2-\sqrt{1-t^2} \leq y \leq 2+\sqrt{1-t^2},\ 0 \leq z \leq 3,\ y \geq z$

という形になる。図示すると以下のようになる。



これは台形である。これの面積は

$\frac{1}{2}\{2-\sqrt{1-t^2}+2+\sqrt{1-t^2}\}\cdot 2\sqrt{1-t^2}$

$= 4\sqrt{1-t^2}$ となる。

Tの体積：$\int_{-1}^{1} S(t)dt = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$

(2) $x=t$のときの断面における $\sqrt{y^2+z^2}$ のとりうる範囲を求める。

$2-\sqrt{1-t^2} \leq y \leq 2+\sqrt{1-t^2}$ かつ $0 \leq z \leq y$ より

yをfixしたとき $y^2 \leq y^2+z^2 \leq 2y^2$

となる。yを動かすことで

$(2-\sqrt{1-t^2})^2 \leq y^2 \leq y^2+z^2 \leq 2y^2 \leq 2(2+\sqrt{1-t^2})^2$

となる。よってx軸に回転させたときの断面は

ドーナツのような形となり、断面積は

$\pi\{2(2+\sqrt{1-t^2})^2-(2-\sqrt{1-t^2})^2\}$

となる。

よって回転体の体積Vは

$\int_{-1}^{1}\pi\{2(2+\sqrt{1-t^2})^2-(2-\sqrt{1-t^2})^2\}dt$

$=\pi\int_{-1}^{1} 2\{4+1-t^2+4\sqrt{1-t^2}\}-\{4+1-t^2-4\sqrt{1-t^2}\}dt$

$=\pi\int_{-1}^{1} 4+1-t^2+12\sqrt{1-t^2}\ dt$

$=\pi\{\underbrace{\int_{-1}^{1} 5-t^2 dt}_{①} + 12\underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt}_{②}\}$

①について $\int_{-1}^{1} 5-t^2 dt = 2\int_{0}^{1} 5-t^2 dt$

$= 2\left[5t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 2\{5-\frac{1}{3}\} = \frac{28}{3}$

②について $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$ は半径1の半円の面積より $\frac{\pi}{2}$ に等しい。よって

体積 $=\pi\cdot\{\frac{28}{3}+12\cdot\frac{\pi}{2}\}$

$= 6\pi^2+\frac{28}{3}\pi$