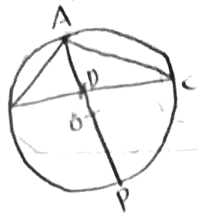
北大 2020 [1]



$|\vec{AB}|=1$
$|\vec{AC}|=2$
$|\vec{BC}|=\sqrt{6}$

(1) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$
(2) $\vec{AP}=s\vec{AB}+t\vec{AC}$ なる s,t
(3) D (APとBCの交点) ADを求めよ.

(1)
$|\vec{BC}|^2=6$, $|\vec{BC}|^2=|\vec{AB}-\vec{AC}|^2$
$=|\vec{AB}|^2+|\vec{AC}|^2-2\vec{AB}\cdot\vec{AC}$
$=1+4-2\cdot\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

より $\frac{1+4-6}{2}=\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ より.

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=-\frac{1}{2}$ //

(2). $\vec{AO}=\frac{1}{2}\vec{AP}=\frac{s}{2}\vec{AB}+\frac{t}{2}\vec{AC}$ であり.

$\vec{BO}=\vec{AO}-\vec{AB}=\left(\frac{s}{2}-1\right)\vec{AB}+\frac{t}{2}\vec{AC}$

$\vec{CO}=\vec{AO}-\vec{AC}=\frac{s}{2}\vec{AB}+\left(\frac{t}{2}-1\right)\vec{AC}$ である.

このとき, $|\vec{AO}|^2=\frac{s^2}{4}|\vec{AB}|^2+\frac{t^2}{4}|\vec{AC}|^2+\frac{st}{2}\vec{AB}\cdot\vec{AC}$
$=\frac{s^2}{4}+t^2-\frac{st}{4}$ …①

$|\vec{BO}|^2=\left(\frac{s^2}{4}-s+1\right)|\vec{AB}|^2+\frac{t^2}{4}|\vec{AC}|^2+\left(\frac{s}{2}-1\right)t\vec{AB}\cdot\vec{AC}$
$=\frac{s^2}{4}-s+1+t^2-\frac{st}{4}+\frac{t}{2}$ …②

$|\vec{CO}|^2=\frac{s^2}{4}|\vec{AB}|^2+\left(\frac{t^2}{4}-t+1\right)|\vec{AC}|^2+\left(\frac{t}{2}-1\right)s\vec{AB}\cdot\vec{AC}$
$=\frac{s^2}{4}+t^2-4t+4-\frac{st}{4}+\frac{s}{2}$ …③

ここで, $|\vec{AO}|^2=|\vec{BO}|^2=|\vec{CO}|^2$ より.

①=②より. $0=-s+1+\frac{t}{2}$ …④
①=③より. $0=-4t+4+\frac{s}{2}$ …⑤
④⇔ $2s-t=2$
⑤⇔ $8t-s=8$ より $t=\frac{6}{5}$ $s=\frac{8}{5}$ である.

∴ $(s,t)=\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$
$\vec{AP}=\frac{8}{5}\vec{AB}+\frac{6}{5}\vec{AC}$.

(3)
$|\vec{AP}|^2=\frac{64}{25}|\vec{AB}|^2+\frac{36}{25}|\vec{AC}|^2+2\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\vec{AB}\cdot\vec{AC}$
$=\frac{64\cdot 1}{25}+\frac{4\cdot 36}{25}-\frac{8\cdot 6}{25}=\frac{64+144-48}{25}$
$=\frac{160}{25}$ より $|\vec{AP}|=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

また, $\vec{AD}=k\vec{AP}=ks\vec{AB}+kt\vec{AC}$ だから,

Dは線分BC上にあるので, $ks+kt=1$.

よって $k=\frac{1}{s+t}=\frac{1}{\frac{6}{5}+\frac{8}{5}}=\frac{5}{14}$ よって

$\vec{AD}=\frac{5}{8}\vec{AP}$ より. $|\vec{AD}|=\frac{5}{14}\cdot|\vec{AP}|$ よって.

$|\vec{AD}|=\frac{5}{14}\cdot\frac{4\sqrt{10}}{5}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ //

北大 2020 [2]

ℓ : $\left(\frac{1}{16}, 0\right)$ と $\left(0, \frac{1}{9}\right)$ を通る　(1) : ℓ 上の格子点を全て求めよ

(2) ℓ 上の格子点のうち $(0,0)$ とのきょりが最小：A，2番目に小さい B　$C=(A.x, B.y)$

ABC の内部と周上にある格子点の個数．

---

(1) ℓ : $16x+9y=1$ をみたす $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ を求める

16 と 9 は互いに素なので一次不定方程式となる．

$x=-5, y=9$ は特殊解の1つより

$16x+9y=1$　より　$x+5=9k$　$(k\in\mathbb{Z})$

$-)\ 16\cdot(-5)+9\cdot9=1$　　　$y-9=-16k$

$16(x+5)+9(y-9)=0$　より

ℓ 上の格子点は $(9k-5, -16k+9)$ とかける．

(2). 原点とのきょりの2乗は

$(9k-5)^2+(-16k+9)^2 = 81k^2-90k+25 +256k^2-288k+81$

$=337k^2-378k+106$

$=337\left(k-\frac{189}{337}\right)^2+106-\frac{189^2}{337}$

$k-\frac{189}{337}$ については．$k=0$ のときは $\frac{-189}{337}$

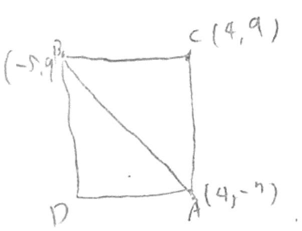
$k=1$ のときは $\frac{148}{337}$

よって．$k=1$のとき最も小さく，$k=0$のときは2番目に小さい．

より A:$(4,-7)$，B$(-5,9)$ より．

65　　　106

C:$(4, 9)$ となる．



16と9は互いに素なので

$\overrightarrow{AB}=(-9,16)$ より AB上に格子点はない．

ここで，D:$(-5,-7)$ とおくと

$\triangle ACB \equiv \triangle BDA$ より

$\triangle ABC$ の内部の格子点数 $=\triangle ABD$ の内部の格子点の数

$=$（長方形 ACBD の内部の格子点の数）$\times\frac{1}{2}$

$=\underset{(9-1)(16-1)}{8\times15}\times\frac{1}{2}=60$ となる．

BC上には10個，AC上には17個あるが，

答えは $\underset{\text{内部}}{60}+\underset{\text{BC}}{10}+\underset{\text{AC}}{17}-\underset{\text{Cがダブってるので}}{1}=\boxed{86}$

別解

ピックの定理を使う．

面積：$\frac{1}{2}16\cdot9=72$．

辺上の格子点の個数：26

内部の格子点の個数：x とおくと．

$72=x+\frac{26}{2}-1$

$x=72-13+1=60$.

$60+26=\underline{86}$

北大 2020 $\boxed{3}$

$\{X_k\}_{i=1}^{n}$ 独立同分布

$(X_k \quad i \ (\frac{1}{6}) \ (1 \le i \le 6))$

サイコロ

(1) $P(\gcd(X_1, \ldots, X_n) = 3)$
(2) $P(\gcd(X_1, \ldots, X_n) = 1)$
(3) $P(\mathrm{lcm}(X_1, \ldots, X_n) = 20)$
を求めよ.

(1) $^{\forall}k \ X_k = 3, 6$ であることが必要

ここで, $X_1 = \cdots = X_n = 6$ なら,

gcd $= 6$ となるので不適. 逆に,

$X_j = 3 \ (\exists j)$ ならば gcd は3となる

よってかくりつは

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{となる}$$

(2). gcd のとりうる値は 1, 2, 3, 4, 5, 6 の範囲である.

gcd が 6 となる確率: $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

5 となる確率: $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

4 となる確率: $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

3 となる確率: $\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$

gcd が 2 となる確率については,

$^{\forall}k \ X_k = 2, 4, 6$ かつ「$^{\forall}k \ X_k = 4$」と「$^{\forall}k \ X_k = 6$」を除けばいいので. $\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$ より,

gcd が 1 となる確率はこれらの排反なので,

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$= \underline{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{//}$$

(3). lcm $= 20$ となるためには,

$^{\forall}k \ X_k = 1, 2, 4, 5$ が必要. であって.

4 と 5 が少なくとも 1回以上 出なくてはならない.

逆にこのとき, lcm $= 20$ となる.

この確率を求めるために, 包除原理を使う.

つまり,

(4, 5 が両方とも 1回以上出る確率)

$= \left(\frac{2}{3}\right)^n -$ (4, 5 のどちらかが出現しない確率)

$= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \{$4 が出ないかくりつ $+$ 5 が出ないかくりつ $-$ 4, 5 の両方が出ない確率$\}$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$= \underline{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{//}$$

北大2020 [4] $0<\alpha<1$, $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$, $\{a_n\}$ $a_1=\alpha$, $a_{n+1}=f(a_n)$

(1) $0<a_n<1$ $a_{n+1}>a_n$ ($\forall n\in\mathbb{N}$)を示せ. (2) $b_n=\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$ $b_{n+1}<b_n$ (3) $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n$

---

(1) $g(x)=\sin\frac{\pi x}{2}-x$ とおくと

x	0	β	1
g'	+	0	−
g	↗		↘

$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-1$ より、$0<\beta<1$で$g'(\beta)=0$

よって$g(x)$は$0\le x\le 1$では $x=0,1$でmin

よって $g(x)\ge\min\{g(0),g(1)\}=0$.

よって$g(x)\ge 0$ 特に $0<x<1$なら $g(x)>0$

ここで、$n=1$のときは $0<a_1<1$ であり、

$0<a_n<1$なら、$0=\sin(\frac{\pi}{2}\cdot 0)<\sin\frac{\pi a_n}{2}<\sin\frac{\pi}{2}=1$

より $0<a_{n+1}<1$. より $\forall n\in\mathbb{N}$, $0<a_n<1$である.

また、$0<a_n<1$より、$a_{n+1}-a_n=g(a_n)>0$

となるため、$a_n<a_{n+1}$となる.

(2) $h(x)=\frac{1-f(x)}{1-x}$ としたとき、$(0<x<1)$

$$h'(x)=\frac{-(1-x)(f'(x))+(1-f(x))}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{1-x}\left\{\frac{1-f(x)}{1-x}-f'(x)\right\}$$ ここで、

$$=\frac{1}{1-x}\{f'(y)-f'(x)\}$$ $(f(1)=1)$

(平均値の定理より、$x<y<1$ $f'(y)=\frac{1-f(x)}{1-x}$)

ここで、$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$ で単調減少より、

$x<y$より $f'(x)>f'(y)$ よって

$h'(x)=\frac{1}{1-x}\{f'(y)-f'(x)\}<0$ より

$h(x)$は単調減少. よって $x<y$なら

$h(x)>h(y)$. また $h(a_n)=b_n$より、

$a_n<a_{n+1}$より $h(a_n)>h(a_{n+1})$より

$b_n>b_{n+1}$ となる.

(2) 難しかったです. 微分という発想に至ってようやく解けました...

(3) $b_1=h(a_1)=h(\alpha)<h(0)=1$

より、$0\le b_1<1$

ここで、$b_n(1-a_n)=(1-a_{n+1})$ で、$b_n\le b_1$より、

$(1-a_{n+1})=b_n(1-a_n)\le b_1(1-a_n)$より

$(1-a_{n+1})\le b_1(1-a_n)$ よって

$0\le(1-a_n)\le b_1^{\,n-1}(1-\alpha)$ となる

$0<\alpha<1$, $0\le b_1<1$より、

$b_1^{\,n-1}(1-\alpha)\to 0$ $(n\to\infty)$ よって

はさみうちの原理より、

$\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$. よって $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

また、$\lim_{x\to 1}h(x)=f'(1)=0$ より $h(1)=0$ と拡張して定めると

$h(x)$は$(0,1]$上連続. よって

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}h(a_n)=h(\lim_{n\to\infty}a_n)=h(1)=0$

∴ $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

北大 2020 $\boxed{5}$ $a>0$ $f(x)$ 可微分 $0<f(x)<1$.

$\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{(1-f(t))f(t)}\,dt = ax$, $f(0)=\frac{1}{3}$ (1) $f(x)$をもとめよ (2) $y=f(x)$ $x=0, x=1$ $y=0$で囲まれた部分の面積を$S(a)$として $\lim\limits_{a\to+0} S(a)$をもとめよ.

---

(1) $\log\dfrac{f(t)}{1-f(t)}$ を t について微分すると

$$\frac{1-f(t)}{f(t)}\cdot\frac{(1-f(t))f'(t)-(-f'(t))f(t)}{(1-f(t))^2}$$

$$=\frac{1-f(t)}{(1-f(t))}\cdot\frac{f'(t)}{f(t)(1-f(t))}=\frac{f'(t)}{f(t)(1-f(t))}$$

($\because\ 0<f(t)<1$)

より,

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{(1-f(t))f(t)}\,dt=\left[\log\frac{f(t)}{1-f(t)}\right]_0^x$$

$$=\log\frac{f(x)}{1-f(x)}-\log\frac{f(0)}{1-f(0)}$$

$$=\log\frac{f(x)}{1-f(x)}-\log\frac{1}{2}=ax$$

両辺の exp をとると

$$\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{1}{2}e^{ax}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{ax}-f(x)\cdot\frac{1}{2}e^{ax}$$

$$f(x)\left\{1+\frac{1}{2}e^{ax}\right\}=\frac{1}{2}e^{ax}$$

より、$f(x)=\dfrac{e^{ax}}{2+e^{ax}}$ //

(2) $S(a)=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

$=\displaystyle\int_0^1\frac{e^{ax}}{2+e^{ax}}\,dx$ $\quad e^{ax}=u$とおくと. $e^{ax}dx=\frac{1}{a}du$.

$x:0\to1$ に対して $u:1\to e^a$ より.

$$=\int_1^{e^a}\frac{1}{2+u}\cdot\frac{1}{a}\,du=\frac{1}{a}\Big[\log(u+2)\Big]_1^{e^a}$$

$$=\frac{1}{a}\log\left(\frac{e^a+2}{3}\right)$$ // となる.

このとき,

$$\lim_{a\to+0}S(a)=\lim_{a\to+0}\frac{1}{a}\log\left(\frac{e^a+2}{3}\right)$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{\log\left(\frac{e^a+2}{3}\right)}{\frac{e^a-1}{3}}\cdot\frac{\frac{e^a-1}{3}}{a}$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{\log\left(\frac{e^a-1}{3}+1\right)}{\frac{e^a-1}{3}}\cdot\frac{e^a-1}{a}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

(ただし $a\to+0$のとき, $\frac{e^a-1}{3}\to+0$,

$\dfrac{\log(u+1)}{u}\xrightarrow[u\to+0]{}1$, $\dfrac{e^s-1}{s}\xrightarrow[s\to+0]{}1$ を用いた)

よって $\lim\limits_{a\to+0}S(a)=\dfrac{1}{3}$ //

今年の北大の問題では

1番好きな問題です.