一橋大 2020 [1]　(1) $10^{10} \bmod 2020$

(2) 100桁の各位の和が2で
2020の割り切れるものの数

(1)
$10^{10} \bmod 101$ と $10^{10} \bmod 20$ を求めれば、中国剰余定理より mod 2020 の値を求めることができる。ここで後者は0である。

$10^{10}=100^5=(101-1)^5\equiv(-1)^5\equiv-1 \pmod{101}$

より　mod 101 で 100 より
　　mod 20 で 0
　　mod 2020 では $\boxed{1920}$ である。

(2) $10^n \bmod 101$ について考える。
$10^4=99\times101+1$ より mod 4 で循環する
$n\equiv0 \pmod 4$ のときは 1
$n\equiv1 \pmod 4$ のときは 10
$n\equiv2 \pmod 4$ のときは $100\equiv-1$
$n\equiv3 \pmod 4$ のときは $91\equiv-10$

100桁の数で各位の和が2であるような自然数は

$$10^{99}+10^k \quad (0\leq k\leq 99)$$

とかける。

mod 101では $-10+10^k$
より $k\equiv1 \pmod 4$ のときだけ101の倍数となる。

$0\leq k\leq 99$ の中に mod 4で1になるものは
$1, 5, \ldots, 97$ $(4l+1, 0\leq l\leq 24)$ より
25個ある。ここで、
$10^{99}+10$ は20の倍数ではないので除外
それ以外は20の倍数

よって $10^{99}+10^{4l+1}$ で101の倍数かつ
20の倍数となるものは、

合計で24個ある

一橋大2020 ② a: const $0 \leqq \theta < \pi$ $\tan 2\theta + a\tan\theta = 0$ となる θ の個数

$\tan\theta = t$ とおく このときtを用いて
θとtは一対一対応する。このとき、

$$\frac{2t}{1-t^2} + at = 0$$

$$\frac{t}{1-t^2}\left(2 + a(1-t^2)\right) = 0$$

$$\frac{-t}{1-t^2}\left(at^2 - 2 - a\right) = 0$$

$t = \pm 1$ では成立しないので

$t(at^2-2-a) = 0$ なるtを用いた数を考えればよい。

(i) $a=0$ のとき、
$-2t=0$ より $t=0$ だけが条件をみたすよって1個

以降は $a \neq 0$ となる。このとき、
$t\left(t^2 - \left(\frac{2}{a}+1\right)\right) = 0$ と同じ。

(ii) $a=-2$ このとき、$t^3=0$ より1個

(iii) $-2<a<0$ このとき、$\frac{-2}{a} > 1$ より $0 > \frac{2}{a}+1$

よって $t\left(t^2 + \left(-1-\frac{2}{a}\right)\right) = 0$ より1個。

それ以外(iv) $a<-2$ なら $\frac{-2}{a} < 1$ より
$0 < 1 + \frac{2}{a}$.

より $t = 0, \pm\sqrt{1+\frac{2}{a}}$ より3個

(v) $0<a$. $t = 0, \pm\sqrt{1+\frac{2}{a}}$ より3個.

これらをまとめると.

$a<-2$; $0<a$ 3個

$-2 \leqq a \leqq 0$ 1個

一橋大 △ABCの外接円半径1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の max, min

2020

3

$A=(1,0)$
$B=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $(0<\alpha<\beta<2\pi)$
$C=(\cos\beta, \sin\beta)$
としても一般性を失わない.

このとき,
$\overrightarrow{AB}=(\cos\alpha-1, \sin\alpha)$
$\overrightarrow{AC}=(\cos\beta-1, \sin\beta)$ より,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\cos\alpha-1)(\cos\beta-1)+\sin\alpha\sin\beta$
$=\cos\alpha(1-2\sin^2\frac{\beta}{2}-1)+2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}-(\cos\beta-1)$
$=2\sin\frac{\beta}{2}\{\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}\}-(\cos\beta-1)$
$=2\sin\frac{\beta}{2}\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})-(\cos\beta-1)$.

$0<\alpha<\beta$ より, $0<\frac{\beta}{2}<\pi$ より $\sin\frac{\beta}{2}>0$.

$-\frac{\beta}{2}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\frac{\beta}{2}$ より,

(i) $\beta>\pi$ のとき, $\overset{\min}{-1}\leq\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})\leq\overset{\max}{1}$
$-2\sin\frac{\beta}{2}-\cos\beta+1\leq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leq2\sin\frac{\beta}{2}-\cos\beta+1$ より
$-2\sin\frac{\beta}{2}+2\sin^2\frac{\beta}{2}\leq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leq2\sin\frac{\beta}{2}+2\sin^2\frac{\beta}{2}$

(ii) $\beta\leq\pi$ のとき, $\overset{\min}{-\sin\frac{\beta}{2}}<\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})<\overset{\max}{\sin\frac{\beta}{2}}$
$-2\sin^2\frac{\beta}{2}+2\sin^2\frac{\beta}{2}<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<2\sin^2\frac{\beta}{2}+2\sin^2\frac{\beta}{2}$ より
$0\leq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<4\sin^2\frac{\beta}{2}$

(i) のとき, $\sin\frac{\beta}{2}=t$ とおくと, t のとりうる値のはんいは $0\leq t\leq1$ より
$-2t+2t^2\leq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leq2t+2t^2\leq\underset{(t=1)}{4}$
$\quad\text{VI}$
$-\frac{1}{2}\ (t=\frac{1}{2})$

(ii) のとき $0<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<4$ より.

(i)(ii) をまとめて.

$-\frac{1}{2}\leq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leq4$ となる.

$\alpha=\beta=\pi$ のとき, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$.

$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$ $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\alpha-\frac{\beta}{2}=-\frac{\pi}{2}$ $\alpha=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}$
$=-\frac{\pi}{3}$

より $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$ のとき,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$ となるため.

実際に max, min となる状況がある.

∴ max : 4
min : $-\frac{1}{2}$

一橋大 2020 ④

$x>0$. $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2-x}^{2+x}|t-x|\,dt$ $F(x)$ の min

---

$x \le 2+x$ であって.

$2-x \le x \iff 1 \le x$ より.

$1 \le x$ のときに $2-x \le x \le 2+x$

$x<1$ のときに $x \le 2-x \le 2+x$.

① $x<1$ のとき.

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}|t-x|\,dt=\frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}(t-x)\,dt$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{t^2}{2}-xt\right]_{2-x}^{2+x}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\{(2+x)^2-(2-x)^2\}-(2+x)+(2-x)$$

$$=\frac{1}{2x}\{4+x^2+4x-4-x^2+4x\}-2-x+2-x$$

$$=4-2x$$

② $x \ge 1$ のとき,

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_{2-x}^{x}(x-t)\,dt+\frac{1}{x}\int_{x}^{2+x}(t-x)\,dt$$

$$=\frac{1}{x}\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_{2-x}^{x}+\frac{1}{x}\left[\frac{t^2}{2}-xt\right]_{x}^{2+x}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{x\cdot(x-(2-x))-\frac{1}{2}\left(x^2-(2-x)^2\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{2}\{(2+x)^2-x^2\}-x\{(2+x)-x\}\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{x(2x-2)-\frac{1}{2}(4x-4)\right\}$$

$$+\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{2}(4x+4)-2x\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\{2x(x-1)-2(x-1)\}+\frac{1}{x}\cdot 2$$

$$=\frac{2(x-1)^2+2}{x}=\frac{2x^2-4x+4}{x}=2x-4+\frac{4}{x}$$

$$2x+\frac{4}{x}-4 \ge 2\cdot\sqrt{2x\cdot\frac{4}{x}}-4 \quad (\text{AM-GM})$$

$$=4\sqrt{2}-4$$

$2x=\frac{4}{x} \iff x=\sqrt{2}$ のときに等号成立.

$x<1$ のとき,

$4-2x>2 \ge 4\sqrt{2}-4$

($\because$ $6 \ge 4\sqrt{2} \iff 36 \ge 32$)

よって $x=\sqrt{2}$ のときに最小値.

$4\sqrt{2}-4$ となる.

文系範囲におさめる解法を考えるのが楽しい問題.

一橋大 2020 $\boxed{5}$

n: 正のせいすう

コイン 表 1点 裏 2点

n以上になったらやめる

ちょうどn点となるかくりつ p_n

(1) $p_1 \sim p_4$

(2) $|p_{n+1}-p_n|<0.01$ となる最小のn

(1) p_1　1　となるため $\boxed{\frac{1}{2}}$

p_2 : $1+1$ となるため、$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{4}}$

2

p_3 : $1+1+1$ となるため、$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{5}{8}}$

$1+2$

$2+1$

p_4 : $1+1+1+1$ となるため、$\frac{1}{16}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$

$1+1+2$ $\quad =\frac{1+6+4}{16}=\boxed{\frac{11}{16}}$

$1+2+1$

$2+1+1$

$2+2$

(2) q_n : ちょうどn点かつ最後が表(1点)

r_n : ちょうどn点かつ最後が裏(2点)

となるかくりつとする。このとき、

$p_n=q_n+r_n$ となっている。さらに

$$q_n=(q_{n-1}+r_{n-1})\cdot\frac{1}{2}$$

$$r_n=(q_{n-2}+r_{n-2})\frac{1}{2}$$ より、

$$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}$$ である。

$c^2-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}=0$ の解は、

$(c-\frac{1}{4})^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$ より　$c=1,-\frac{1}{2}$.

$(c-1)(c+\frac{1}{2})=0$

$(p_n-p_{n-1})=\frac{1}{2}(p_{n-1}-p_{n-2})$ より、

$$(p_{n+1}-p_n)=\frac{1}{2^{n-1}}(p_2-p_1)$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}$$

$|p_{n+1}-p_n|<0.01$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{n+1}}<0.01$

$\Leftrightarrow 100<2^{n+1}$

より、$\boxed{n=6}$ のときはじめて

不等式が成立する。