東大[I] $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$

$$=\int_0^1 x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$=\underbrace{\int_0^1 x^2dx}_{①}+\underbrace{\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx}_{②}+\underbrace{\int_0^1\frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx}_{③}+\underbrace{\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx}_{④}\cdots(*)$$

① : $\displaystyle\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

② : $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$

③ : $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1\frac{(x^2+1-1)}{(x^2+1)}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$s=\sqrt{1+x^2}$ と置換 $ds=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

x	$0\to1$
s	$1\to\sqrt{2}$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{s^2-1}{s^2}\cdot ds=\int_1^{\sqrt{2}}1-\frac{1}{s^2}ds$$

$$=\left[s+\frac{1}{s}\right]_1^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1-1=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$$

④ : $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$x=\tan\theta$ と置換 $dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{1/\cos^4\theta}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$

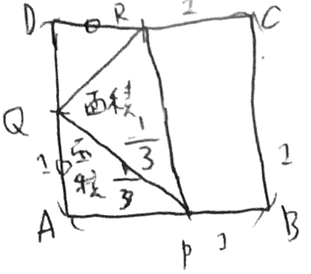
$$=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

$(*)=①+②+③+④$

$$=\frac{1}{3}+(\sqrt{2}-1)+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}-\frac{35}{12}+\frac{\pi}{8}$$

東大[2]



$\frac{DR}{AQ}$ の max, min

$\frac{r}{q}$

xy 平面において,

$A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$

として, $0<p,q,r<1$ について,

$P(p,0)$, $Q(0,q)$, $R(r,1)$ とすると,

$\overrightarrow{PQ}=(-p,q)$, $\overrightarrow{PR}=(r-p,1)$ より,

$$S(\triangle PQR)=\frac{1}{2}\left|-p\cdot 1-q(r-p)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-p-qr+pq\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(1-q)p+qr\right\}$$ よって

$$(1-q)p+qr=\frac{2}{3}$$

$\frac{1}{3}=S(\triangle APQ)=\frac{1}{2}pq$ より, $pq=\frac{2}{3}$

ここで, $pq\leq p$, $pq\leq q$ より, $p\geq\frac{2}{3}$, $q\geq\frac{2}{3}$ である

$p=\frac{2}{3q}$ より,

$(1-q)\cdot\frac{2}{3q}+qr=\frac{2}{3}$ より

$$r=\frac{2}{3q}-\frac{2(1-q)}{3q^2}=\frac{4q-2}{3q^2}$$

よって $\frac{DR}{AQ}=\frac{4q-2}{3q^3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{q^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{q^3}$

ここで, $q\geq\frac{2}{3}$ のとき,

$r=\frac{4q-2}{3q^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{q}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{q^2}$ だが,

$\frac{dr}{dq}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{q^2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{q^3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{q^3}(1-q)\geq 0$

より $\frac{2}{3}\leq q\leq 1$ のとき, $\frac{1}{2}\leq\frac{4q-2}{3q^2}\leq\frac{2}{3}$

よって問題文の条件を満たすためには

$\frac{2}{3}\leq q\leq 1$ を満たしていることが

必要条件であるが, 逆に,

$\frac{2}{3}\leq q\leq 1$ を満たしていれば,

$p=\frac{2}{3q}$, $r=\frac{4q-2}{3q^2}$ とすれば, 問題文の

条件は満たされる. 逆にPQRが,

問題文の条件を満たすパターンはこれしか

よってこのとき

$\frac{DR}{AQ}=\frac{r}{q}$ であるため,

$\frac{2}{3}\leq q\leq 1$ での

$f(q)=\frac{4q-2}{3q^3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{q^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{q^3}$ での

max, minを求める問題に帰着される.

ここで, $f'(q)=\frac{4}{3}\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{q^3}\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(-3\cdot\frac{1}{q^4}\right)$

$$=-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{q^3}+2\cdot\frac{1}{q^4}$$

$$=\frac{1}{q^4}\left\{2-\frac{8}{3}q\right\}$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{q^4}\left\{\frac{3}{4}-q\right\}$$ より増減表をかいて,

q	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$f'(q)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(q)$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

よって $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$

より

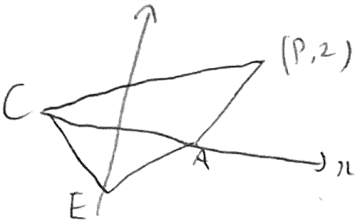
min : $\frac{2}{3}$

max : $\frac{64}{81}$

東大[3] 謎の八面体 (1) y=0 (2) α∩D は8角形 P (3) (y,z) の面積,

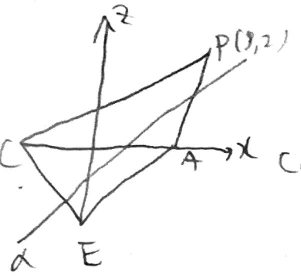
π(XYZ) (ただし X, Y, Z は一直線上にない) を、XとYとZを通る平面(上の点の集合)とする。

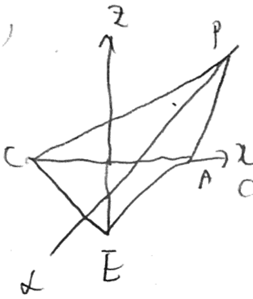
(1) y=0 で切ったとき、B, D は y=0 上にない。また、α: x−z=1 である。
A, P, C, E は y=0 平面上にある。よって図示すると、

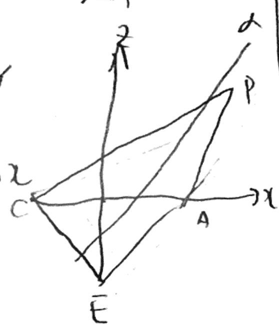


となる。ここに α: x−z=1 を重ねることを考える。

すると 2<p<3, p=3, 3<p<4 で場合分けする。

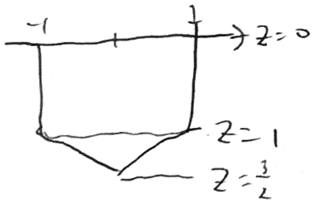






となる。

(2) z≤0 の部分で α との交点を考える。
注: {XY} で線分XY上の点の集合を表す
{AB}∩α={M}, {AD}∩α={N},
{BC}∩α=φ, {CD}∩α=φ, {AE}∩α=φ
で、{BE}∩α, {CE}∩α, {DE}∩α はそれぞれ1点集合である。よって図示すると



のようになる。

ここで、切り口Dの8角形が z=0 上に頂点をもたないならば、π(APB)=π(ABE) だが、(p,0,2)∈π(ABE) より p=4 となり不適。よって切り口Dは z=0 上に頂点をもつ。よって z≤0 で5つの頂点がある。つまり切り口が8角形 ⇒ z>0 に頂点が3つとなる。

ここで、p=3 のとき、
{AD}∩α={BP}∩α={CP}∩α={DP}∩α={P} となり、z>0 に頂点が1つ ⇒ 切り口Dは6角形となり不適。よって p≠3。

2<p<3 のとき、
{BP}∩α={CP}∩α={DP}∩α=φ かつ {AP}∩α: 1点集合より、
切り口Dは6角形。
(また、AP上の点Xに対して、XN//XM となることはない。{NM}∌X だから。)

3<p<4 のとき、
{BP}∩α, {CP}∩α, {DP}∩α が1点集合。
また、P∉α, {AP}∩α=φ である。よって M と CP上の点を結ぶ線分が BP と交わることはない (∵ π(MCP)∩{BP}\{P}=φ)
BP〜CP上の点も同様に、π(BPD)∩{CP}\{P}=φ, π(NDC)∩{BP}\{P}=φ より、
{BP}∩α, {CP}∩α, {DP}∩α の点は一直線になることはなく、きちんと切り口Dの8角形の頂点となる。よって切り口は8角形
よって(2)の答えとしては、3<p<4 である。

(3) y≥0, z≥0 上については、
原点, M, {BP}∩αの点, {CP}∩αの点 の4つの頂点からなる4角形で結ばれた領域となる。

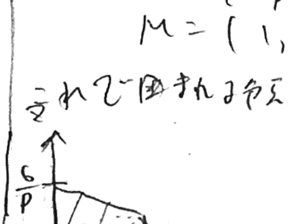
$\{BP\}\cap\alpha = \begin{pmatrix} tp \\ 2-2t \\ 2t \end{pmatrix}$ $0\le t\le 1$ かつ $tp-2t=1$ より、

$\{BP\}\cap\alpha=\left\{\left(\frac{p}{p-2}, \frac{2p-6}{p-2}, \frac{2}{p-2}\right)\right\} \equiv Q$

$\{CP\}\cap\alpha=\left\{\left(\frac{6}{p}+1, 0, \frac{6}{p}\right)\right\} \equiv R$

$M=(1,1,0)$, $O=(0,0,0)$

これで囲まれる領域を (y,z) 平面に射影すると、



図のようになる。よってこの面積は
(台形)+(三角形) より

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{6}{p}+\frac{2}{p-2}\right\}\cdot\frac{2p-6}{p-2} + \frac{2}{p-2}\cdot\frac{-p+4}{p-2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{6(p-3)}{p(p-2)}+\frac{2p-6-p+4}{(p-2)^2}=\frac{1}{p-2}\left\{\frac{6p-18+p}{p}\right\}$$

$$=\boxed{\frac{7p-18}{p(p-2)}}$$

東大[4] $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ (1) $\gcd(n^2+1, 5n^2+9)$ (2) proof $\forall m \in \mathbb{Z}$, $(n^2+1)(5n^2+9) \neq m^2$

(1) $\gcd(n^2+1, 5n^2+9)$

even：偶数
odd：奇数

$= \gcd(n^2+1, 4n^2+8)$

$= \gcd(n^2+1, 4)$

ここで，$n \in \mathbb{N}$ について，

$n^2 \bmod 4 = \begin{cases} 0 & (n: \text{even}) \\ 1 & (n: \text{odd}) \end{cases}$ より，

$(n^2+1) \bmod 4 = \begin{cases} 1 & (n: \text{even}) \\ 2 & (n: \text{odd}) \end{cases}$ である．

よって $\gcd(n^2+1, 4) = \begin{cases} 1 & (n: \text{even}) \\ 2 & (n: \text{odd}) \end{cases}$ より，

$\gcd(n^2+1, 5n^2+9) = \begin{cases} 1 & (n: \text{even}) \\ 2 & (n: \text{odd}) \end{cases}$ となる．

(2) (i) n：偶数 のとき，

$n^2+1, 5n^2+9$ が互いに素であるので，

$\exists m \in \mathbb{N}$ について，$(n^2+1)(5n^2+9) = m^2$ ならば，

$\exists a, b \in \mathbb{N}$ があって $ab = m$ かつ $\begin{cases} n^2+1 = a^2 \\ 5n^2+9 = b^2 \end{cases}$ となる

特に，$n^2+1 = a^2 \iff (a-n)(a+n) = 1$

となる $(n, a) \in \mathbb{N}^2$ が

存在することになるのだが，このとき，

$(a-n, a+n) = (1, 1), (-1, -1)$ より，

$(n, a) = (0, 1), (0, -1)$ より $\underbrace{\text{不適}}_{n \geq 1 にならない}$．よって

n：偶数 のとき，

$(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数には

ならない

(ii) n：奇数のとき，

このとき，$\gcd(n^2+1, 5n^2+9) = 2$ であるため，

$\dfrac{n^2+1}{2}, \dfrac{5n^2+9}{2} \in \mathbb{N}$ であって，かつ

$\gcd\left(\dfrac{n^2+1}{2}, \dfrac{5n^2+9}{2}\right) = 1$ である．

また，$(n^2+1)(5n^2+9)$ が平方数であるとき，

$\dfrac{(n^2+1)(5n^2+9)}{4} = \left(\dfrac{n^2+1}{2}\right)\left(\dfrac{5n^2+9}{2}\right)$ も平方数となる

よって $\dfrac{n^2+1}{2}, \dfrac{5n^2+9}{2}$ が互いに素であることから，

$a, b \in \mathbb{N}$ があって

$\begin{cases} \dfrac{n^2+1}{2} = a^2 \\ \dfrac{5n^2+9}{2} = b^2 \end{cases}$ をみたす

このとき，$n^2 = 2a^2 - 1$,

$n^2 = \dfrac{2b^2-9}{5}$ となるため，

$2a^2 - 1 = \dfrac{2b^2-9}{5}$ となるが，このとき，

$\iff 10a^2 - 5 = 2b^2 - 9$

$\iff 4 = 2b^2 - 10a^2$

$\iff 2 = b^2 - 5a^2$ となる．

両辺の mod 5 をとると，

$2 \equiv b^2 \pmod 5$ となるが，

そのような $b \in \mathbb{N}$ は存在しない

($\because$：$b^2 \bmod 5 = 0, 1, 4$ のどれか)

よって矛盾するため，n：奇数でもない．

よって (i)(ii) より

$n \geq 1$ ならば

$(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数にはならない．

東大[5] $n \geq 1$ (1) $x^{2n-1} = \cos x$, $x \overset{\exists!}{=} a_n$ (2) $P.t$ $\cos a_n > \cos 1$ (3) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n^n = b$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a} = c$ $(a, b, c) = ?$

(1) 注：$1 < \frac{\pi}{2}$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ より，$x^{2n-1} = \cos x$ ならば，

$-1 \leq x^{2n-1} \leq 1$ よって（x^{2n-1}：単調増加より）

$-1 \leq x \leq 1$ である このとき，

$0 < \cos 1 \leq x \leq 1$ より，$x^{2n-1} = \cos x$ の

（実数）解は，$0 \leq x \leq 1$ をみたす．このとき，

$f(x) = x^{2n-1} - \cos x$ について，

$f'(x) = (2n-1) \cdot x^{2n-2} + \sin x \geq 0$ より，

f：単調増加，と，$f(0) = -1 < 0$，

$f(1) = 1 - \cos 1 > 0$ より，

中間値の定理より $\exists!\, a_n \in [0, 1]$ があって

$f(a_n) = 0$ となる．

(2) $a_n \in [0, 1]$ より，このとき

$\cos 1 \leq \cos a_n \leq 1$ より $\cos 1 \leq \cos a_n$ だが，

$f(1) = 1 - \cos 1 > 0$ より，$a_n \neq 1$ である．

よって $\cos 1 < \cos a_n$（また，$f(0) \neq 0$ より，$a_n \neq 0$ よって $0 < a_n < 1$）

(3)．a_n は $0 < a_n < 1$ かつ，

$a_n^{2n-1} = \cos a_n$ より，

$a_n = \sqrt[2n-1]{\cos a_n}$ となる．

ここで，(2)より，$\cos a_n > \cos 1$ より，

$a_n > \sqrt[2n-1]{\cos 1}$ よって

$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$ をみたす．

$n \to \infty$ のとき，$\frac{\log(\cos 1)}{2n-1} \to 0$ より，$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} \to 1$

よって はさみうちの原理より，

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ よって $a = 1$

$a_n^{2n-1} = \cos a_n$ より，

$a_n^{2n} = a_n \cos a_n$

$a_n^n = \sqrt{a_n \cos a_n}$ よって．

$\lim_{n\to\infty} a_n^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n \cos a_n}$ ← $[0,1]$ 上 れんぞく

$= \sqrt{a \cos a} = \sqrt{\cos 1}$

$c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^n - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1} = \lim_{a_n\to 1} \frac{\sqrt{a_n \cos a_n} - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1}$ について．

$= \lim_{a\to 1} \frac{\sqrt{a \cos a} - \sqrt{\cos 1}}{a - 1} = \lim_{a\to 1} \frac{g(a) - g(1)}{a - 1}$

注：$g(x) = \sqrt{x \cos x}$

$= g'(1)$（$\because$ g は $[0,1]$ 上 C^1 級）

よって

$g'(x)$ を求める．$(x \cos x)' = \cos x - x \sin x$

$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ より．

$(\sqrt{x \cos x})' = (\cos x - x \sin x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x \cos x}}$

より，$g'(1) = (\cos 1 - \sin 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 1}}$

$= \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$

よって
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{\cos 1} \\ c = \dfrac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}} \end{cases}$$

京大[6] $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ a,b$ ($\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}$, $a,b \in \mathbb{R}$)

1. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は相異なる
2. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は $z^4-2z^3-2az+b=0$ の解
3. $\alpha\beta+\gamma\delta$ について $\mathrm{Re}(\alpha\beta+\gamma\delta)=0$, $\mathrm{Im}(\alpha\beta+\gamma\delta)\neq 0$

(1) 2つが実数,残り2つは共役な虚数, (2) b を a で表す, (3) $\alpha+\beta$ のとりうるはんいを図に.

(1) $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ のうち実数がいくつあるかについて考える. 虚部が0でないものについて考えると,それは共役なものとして2つ1組で与えられる. よって実数の個数は0, 2, 4 のどれかである.

(i) 実数が4つあると仮定.

このとき,$\alpha\beta+\gamma\delta\in\mathbb{R}$ となり矛盾する.

(ii) 実数が0つと仮定

このとき, $\alpha=\bar{\beta},\ \gamma=\bar{\delta}$ …①
$\alpha=\bar{\gamma},\ \beta=\bar{\delta}$ …② のどれか
$\alpha=\bar{\delta},\ \beta=\bar{\gamma}$ …③ となるが,

②③については①の文字を入れ替えれば同じ議論をすることができる.

①のとき, $\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\bar{\alpha}+\gamma\bar{\gamma}\in\mathbb{R}$ より ×.

② のとき. $\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\beta+\overline{\alpha\beta}\in\mathbb{R}$ より ×.

③ のとき, ②と同様で ×

よってこのとき矛盾する.

(i)(ii)より実数の数は2つとなる.

このとき, α,β が実数でない場合 $\alpha\beta\in\mathbb{R}$
$\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ より. $\alpha\beta+\gamma\delta\in\mathbb{R}$ より ×.

よって $\delta=\bar{\alpha}$ としてよくて,
$\alpha\beta+\gamma\delta=\underline{\alpha\beta+\gamma\bar{\alpha}}$ となる.
(ここで $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$)

(2) $\mathrm{Re}(\alpha\beta+\gamma\bar{\alpha})=0$ $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ より

$\mathrm{Re}(\alpha)\beta+\mathrm{Re}(\bar{\alpha})\gamma=0$

$\mathrm{Re}(\alpha)(\beta+\gamma)=0$

$\Rightarrow (\alpha+\bar{\alpha})(\beta+\gamma)=0$.

ここで, $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})(x-\beta)(x-\gamma)$ と $x^4-2x^3-2ax+b$ の係数を比較すると,

$$\begin{cases}\alpha+\bar{\alpha}+\beta+\gamma=2\\ \alpha\bar{\alpha}+\underbrace{(\alpha+\bar{\alpha})(\beta+\gamma)}_{0}+\beta\gamma=0 \Rightarrow \alpha\bar{\alpha}+\beta\gamma=0\\ (\alpha+\bar{\alpha})\beta\gamma+(\beta+\gamma)\alpha\bar{\alpha}=2a\\ \alpha\bar{\alpha}\beta\gamma=b\end{cases}$$

(i) $\alpha+\bar{\alpha}=0$ このとき, $\beta+\gamma=2$, $\alpha\bar{\alpha}=-\beta\gamma$ より

$a=\alpha\bar{\alpha}$, $b=-(\alpha\bar{\alpha})^2=-a^2$.

(ii) $\beta+\gamma=0$ のとき, $\alpha+\bar{\alpha}=2$. $\beta\gamma=-\alpha\bar{\alpha}$ より

$a=\beta\gamma$, $b=-(\beta\gamma)^2=-a^2$

(i)(ii)より. $\underline{b=-a^2}$ $a\neq0$

(3)(i) $\alpha+\bar{\alpha}=0$. このとき, $s\in\mathbb{R}$ を用いて.
$\alpha=si$ とかける. このとき, $\beta\gamma=-\alpha\bar{\alpha}=-s^2$ より,

$(z-\beta)(z-\gamma)=z^2-2z-s^2$
$=(z-1)^2-1-s^2$ とかける

よって $\beta=1\pm\sqrt{1+s^2}$ となる(符号はどちらでもOK)

よってこれは.

$\alpha+\beta=\underbrace{(1\pm\sqrt{1+s^2})}_{x}+i\underbrace{(s)}_{y}$ について.

$(x-1)^2+y^2=1$ となる $(y\neq0)$

(ii) $\beta+\gamma=0$ このとき, $\alpha+\bar{\alpha}=2$ より,

$(s\neq0)$ $s\in\mathbb{R}$ について. $\alpha=1+si$ とかける. このとき,
$\alpha\bar{\alpha}=1+s^2$ より. $\beta\gamma=-1-s^2$ となるため.

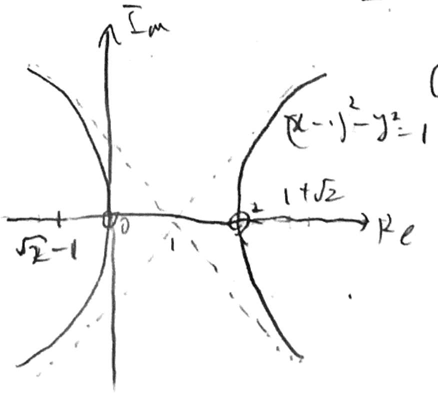
$(z-\beta)(z-\gamma)=z^2-1-s^2$ となる

よって $\beta=\pm\sqrt{1+s^2}$ (符号どちらでもOK)

より $\alpha+\beta=\underbrace{1\pm\sqrt{1+s^2}}_{x}+\underbrace{s}_{y}i$ となるため.

$(x-1)^2+y^2=1$ となる. $(y\neq0)$

(i)(ii)より. $\alpha+\beta$ の適合領域は.



の双曲線上となる.

ただし $y=0$ の点を除く.