1 (1) $h>0$, $s<t$, $O(0,0)$ $P(h,s)$, $Q(h,t)$　$p^2+q^2+r^2 \geq 4\sqrt{3}S$

(2) $a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geq 2\sqrt{3}T$

(1)

$p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S$ ……(※)

$= h^2+s^2+h^2+t^2+s^2+t^2-2st-2\sqrt{3}ht+2\sqrt{3}hs$

ここで, $\frac{s}{h}=x$, $\frac{t}{h}=y$ $(x<y)$ とおくと, $(\because h>0)$

(※) $=2h^2(x^2+y^2+1-xy-\sqrt{3}y+\sqrt{3}x)$

$=2h^2(\underbrace{x^2+(\sqrt{3}-y)x+y^2-\sqrt{3}y+1}_{①})$

を x についての2次式とみなすと,

判別式は

$(\sqrt{3}-y)^2-4(y^2-\sqrt{3}y+1)$

$=y^2-2\sqrt{3}y+3-4y^2+4\sqrt{3}y-4$

$=-(3y^2-2\sqrt{3}y+1)=-(\sqrt{3}y-1)^2<0$

よって ① ≥ 0 である. $(\sqrt{3}y-1)\neq 0$ なら,

① >0 であるため, ① $=0$ のとき, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ が必要.

このとき, (※) $=2h^2(x^2+\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{3})$

$=2h^2(x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2$ より,

$(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ のとき, (※) $=0$.

よって 不等式(※) ≥ 0 は成立し,

$(s,t)=(-\frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{h}{\sqrt{3}})$ のとき,

等号成立する.

注: △OPQ がどのような形でも,

点Oを原点に平行移動しておく,

PQ が y 軸に平行になるようにおくと,
(かつ x 座標が正)

うまく h, s, t を定めれば問題の形になる.

よって (1)の不等式は

全ての三角形について成立する.

また, 等号成立は

△OPQ が正三角形のときである.

(2) 四面体の各面について (1)の不等式を

適用させると,

$l^2+b^2+n^2 \geq 4\sqrt{3}\,S(\triangle ADC)$ …Ⓐ

$m^2+c^2+l^2 \geq 4\sqrt{3}\,S(\triangle ABD)$ …Ⓑ

$n^2+a^2+m^2 \geq 4\sqrt{3}\,S(\triangle BDC)$ …Ⓒ

$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S(\triangle ABC)$ …Ⓓ

両辺を足しつづけると,

$S(\triangle ADC)+\cdots+S(\triangle ABC)=T$ より,

$2a^2+2b^2+2c^2+2l^2+2m^2+2n^2 \geq 4\sqrt{3}T$ より

$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geq 2\sqrt{3}T$ となる

等号成立は

Ⓐ〜Ⓓ で等号成立

$\Longleftrightarrow$ 全ての面が正三角形

$\Longleftrightarrow$ 四面体ABCDは正四面体

である.

[2]

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y|\, f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x} \quad \cdots (*)$$

$A=?$ $B=?$ $f(x)=?$ 東工大 2019.

$xy = s$ と置換すると,

$$(\text{左辺}) = \int_1^2 |\log s - \log x|\, f(s)\,ds$$

$$= \int_1^x (\log x - \log s) f(s)\,ds + \int_x^2 (\log s - \log x) f(s)\,ds$$

ここで, $F(x)=\int_1^x f(s)\,ds$, $G(x)=\int_1^x f(s)\log s\,ds$

$P=F(2)$, $Q=G(2)$ とおくと,

$$(\text{左辺}) = \frac{2\log x}{x}F(x) - \frac{2}{x}G(x) - \frac{\log x\, P}{x} + \frac{Q}{x}$$

これに $\frac{d}{dx}(x\cdot *)$ を作用させると,

$$2\cdot\frac{1}{x}F(x) + \cancel{2\log x f(x)} - \cancel{2\log x f(x)} - \frac{P}{x} \quad \cdots ①$$

これが $\frac{d}{dx}(x\cdot(\text{右辺}))$ と等しくなるため.

$$① = 6x\log x - 3x + A \quad \cdots ②$$

①②にまた $\frac{d}{dx}(x\cdot\boxed{\quad})$ を作用させると

$$2f(x) = \frac{d}{dx}(6x^2\log x - 3x^2 + Ax)$$

$$= 6x + 12x\log x - 6x + A$$

$$\therefore\ \boxed{f(x) = 6x\log x + \frac{A}{2}}$$

このとき,

$$F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x^2\log x + \frac{Ax}{2} - \frac{A}{2} + \frac{3}{2}$$

$$G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x^2(\log x)^2 - 3x^2\log x + \frac{A}{2} - \frac{3}{2} + \frac{A}{2}x\log x - \frac{Ax}{2}$$

である.

①×x より,

$$2F(x) - P = 6x^2\log x - 3x^2 + Ax$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 6x^2\log x + Ax - A + 3 - P = 6x^2\log x - 3x^2 + Ax$$

$$\Rightarrow \underline{-A+3-P=0} \qquad A = 3 - P,\quad P = 3 - A$$

$x\times(*)$ を比較すると,

$$2\log x\left\{-\frac{3}{2}x^2 + 3x^2\log x + \frac{Ax}{2} - \frac{A}{2} + \frac{3}{2}\right\}$$

$$-2\left\{\frac{3}{2}x^2 + 3x^2(\log x)^2 - 3x^2\log x + \frac{A}{2} - \frac{3}{2} + \frac{A}{2}x\log x - \frac{Ax}{2}\right\}$$

$$-\log x\,P + Q = 3x^2\log x - 3x^2 + Ax + B$$

$$\Leftrightarrow -3x^2\log x + \cancel{6x^2(\log x)^2} + \cancel{Ax\log x} - A\log x + 3\log x - \cancel{3x^2} - \cancel{6x^2(\log x)^2} + 6x^2\log x - A + 3 - \cancel{Ax\log x} + \cancel{Ax} - \log x\,P + Q = 3x^2\log x - \cancel{3x^2} + \cancel{Ax} + B$$

$$\Rightarrow \log x\{-A + 3 - P\} - A + 3 + Q = B$$

$$\Rightarrow B = P + Q$$

ここで

$$P = F(2) = -\frac{3}{2}\cdot 2^2 + 12\log 2 + A - \frac{A}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{A}{2} + 12\log 2 - \frac{9}{2}$$

$$A = 3 - P = 3 - \frac{A}{2} - 12\log 2 + \frac{9}{2}$$

$$\frac{3A}{2} = \frac{15}{2} - 12\log 2 \quad \therefore\ \underline{A = 5 - 8\log 2}$$

$$\Rightarrow P = -2 + 8\log 2$$

$$Q = G(2) = 6 + 12(\log 2)^2 - 12\log 2 + \frac{A}{2} - \frac{3}{2} + A\log 2 - A$$

$$= 6 + 12(\log 2)^2 - 12\log 2 + \frac{5}{2} - 4\log 2 - \frac{3}{2} + 5\log 2 - 8(\log 2)^2 - 5 + 8\log 2$$

$$= 4(\log 2)^2 - 3\log 2 + 2$$

$$\therefore\ B = P + Q = 4(\log 2)^2 + 5\log 2$$

$$\therefore \begin{cases} f(x) = 6x\log x + \frac{5}{2} - 4\log 2 \\ A = 5 - 8\log 2 \\ B = 4(\log 2)^2 + 5\log 2 \end{cases}$$

東工大[3] $M=\left\{\frac{z}{3+2i} \mid z\in\mathbb{Z}[i]\right\}$ $N(r)=\#\{w\in M \mid |w|\le r\}$ (1) $\{r \mid 10\le N(r)<25\}$
(2) $0\to1\to1+\frac{i}{2}\to\frac{1+i}{2}\to\frac{1}{2}+i\to i\to0$ の内部or境界上のMの元の個数.

(1) $F(r)=\#\{z\in\mathbb{Z}[i] \mid |z|\le r\}$ とする.

$z\in\mathbb{Z}[i]$ について, $\frac{z}{3+2i}\in M$ だが

$\left|\frac{z}{3+2i}\right|\le r \iff |z|\le\sqrt{13}\,r$ より,

$N(r)=F(\sqrt{13}\,r)$ となる. よって

$\{r\in\mathbb{R}_+ \mid 10\le F(\sqrt{13}\,r)<25\}$ を求める.

$\mathbb{Z}[i]\ni z$ に対し $|z|^2$ を書いた図を右に示す

18	13	10	9	10	13	18
13	8	5	4	5	8	13
10	5	2	1	2	5	10
9	4	1	0	1	4	9
10	5	2	1	2	5	10
13	8	5	4	5	8	13
18	13	10	9	10	13	17

ここで $f(r)=\#\{z\in\mathbb{Z}[i] \mid |z|^2=r\}$ とすると,

$f(0)=1$ $f(7)=0$
$f(1)=4$ $f(8)=4$
$f(2)=4$ $f(9)=4$
$f(3)=0$ $f(10)=8$
$f(4)=4$ $f(11)=0$
$f(5)=8$ $f(12)=0$
$f(6)=0$ $f(13)=8$

ここで $F(x^2)=\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor} f(k)$ より $F(x^2)=F(\lfloor x^2\rfloor)$

$F(3)=9$, $F(4)=13$, $F(5)=F(6)=F(7)=21$, $F(8)=25$

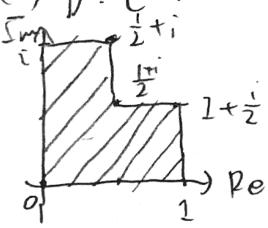
よって $10\le F(x^2)<25 \iff 4\le\lfloor x^2\rfloor\le7$ より

$4\le x^2<8$ よって $x=\sqrt{13}\,r$ とすると,

$\frac{2}{\sqrt{13}}\le r<\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$ よって

$\{r \mid 10\le N(r)<25\}=\left[\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{2\sqrt{26}}{13}\right)$ 半開区間

(2) D: を問に出てきた領域とする。Dを図示すると,



ただし境界を含む.
つまり求めるべきものは
$\#(M\cap D)$ となる

ここで $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を, $z\mapsto(3+2i)z$ とすると

$\varphi: M\to\mathbb{Z}[i]$ で全単射となる. よって

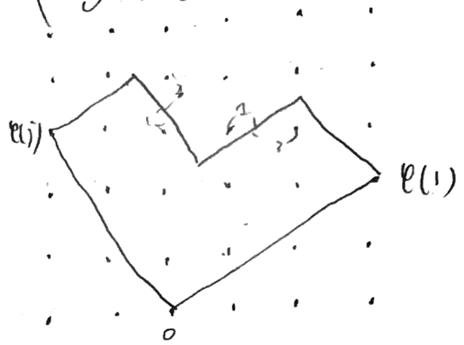
$\#(M\cap D)=\#(\mathbb{Z}[i]\cap\varphi(D))$ となる.

よって $\varphi(D)$ を図示する.

$\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ について

$$\begin{cases} 1\to3+2i \\ 1+\frac{i}{2}\to\frac{4+7i}{2} \\ \frac{1+i}{2}\to\frac{1+5i}{2} \\ \frac{1}{2}+i\to\frac{-1+8i}{2} \\ i\to-2+3i \\ 0\to0 \end{cases}$$

となるため, $\mathbb{Z}[i]$ とあわせて図示すると



注: φ(D) は閉集合
φ: C→C が全単射で
D: 閉だからね!

このようになる.

$\varphi(D)^{\circ}\cap\mathbb{Z}[i]$ の元を列挙すると,

$i,\ 1+i,\ -1+2i,\ 2i,\ 1+2i,\ 2+2i,\ -1+3i,\ 3i,\ 2+3i$ より 9コ.

$\partial\varphi(D)\cap\mathbb{Z}[i]$ の元については

$0,\ 3+2i,\ -2+3i$ の3コ. よって

$\#(\varphi(D)\cap\mathbb{Z}[i])=\boxed{12}$

東工大[5] $a=\frac{2^8}{3^4}$ $b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k\,k!}$ $(k=1,2,3,\dots)$ $f(x)=(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(1) f は $x>0$ で減少することを示せ。 (2) $M=\max_{k\in\mathbb{N}} b_k$ と、$\{k\in\mathbb{N} \mid b_k=M\}$ を求めよ。

$a=\left(\frac{4}{3}\right)^4$

(1) $f(x)=(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$=(x+1)\{\log(1+x)-\log x\}$

$=(x+1)\log(1+x)-(x+1)\log x$

より、$f'(x)=(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}+1\cdot\log(1+x)$

$-(x+1)\cdot\frac{1}{x}-1\cdot\log x$

$=1-\frac{1+x}{x}+\log(1+x)-\log x$

$=-\frac{1}{x}+\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

ここで $g(t)=-t+\log(1+t)$ $(t\geq 0)$ とすると、

$g'(t)=-1+\frac{1}{1+t}=\frac{-t}{1+t}\leq 0$.

よって $g(t)$ は単調減少であり、

$g(0)=0$ より、$g(t)\leq 0$ であり

特に $t\neq 0$ のとき、$g(t)<0$ である。ここで、

$x>0$ のとき、$\frac{1}{x}>0$ であるが、このとき、

$f'(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)<0$ である。よって

$\forall x>0,\ f'(x)<0$ より

$f(x)$ は $x>0$ で単調減少である。

(2) $k=2,3,4,\dots$ について

$\log\left(\frac{b_k}{b_{k-1}}\right)=\log\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k\cdot k!}\cdot\frac{a^{k-1}(k-1)!}{k^k}\right)$

$=\log\left(\frac{1}{a}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}\right)$

$=(k+1)\log\left(1+\frac{1}{k}\right)-\log a$

$=f(k)-\log a$

ここで、$\log\left(\frac{b_k}{b_{k-1}}\right)<0 \iff \log b_k<\log b_{k-1}$

$\iff b_k<b_{k-1}$ $(\because b_n>0)$

また、 〃 $=0 \iff b_k=b_{k-1}$

〃 $>0 \iff b_k>b_{k-1}$

ここで、$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ より、

$f(x)=1+\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x}\right)$ より、

$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$、また、$\lim_{x\to+0} f(x)=+\infty$

また、$a=\frac{256}{81}>\frac{243}{81}=3>e$ より $\log a>1$

よって中間値の定理より、$x\in[0,\infty)$ であって、$f(x)=\log a$ となるものが存在し、

f の単調性から、それは存在すれば一意であることがわかる。

ここで、$\log a=\log\left(\left(\frac{4}{3}\right)^4\right)=4\log\left(\frac{4}{3}\right)$

$=(3+1)\log\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$=f(3)$

より、$f(3)=\log a$.

$x>3$ ならば、$f(x)<\log a$

$x<3$ ならば、$f(x)>\log a$

よって、$\log\left(\frac{b_3}{b_2}\right)=f(3)-\log a=0$ で、

$\log\left(\frac{b_2}{b_1}\right)>0$ より $b_2>b_1$

$k>3$ ならば、

$\log\left(\frac{b_k}{b_{k-1}}\right)=f(k)-\log a<0$ より

$b_k<b_{k-1}$ よって、

$b_1<b_2=b_3>b_4>b_5>\cdots$ となる。

よって $M=b_2=b_3$ であり、

$b_2=\frac{3^8\cdot 3^3}{2^{16}\cdot 2}=\frac{3^{11}}{2^{17}}$ $\left(b_3=\frac{3^{12}}{2^{24}}\cdot\frac{2^8}{3\cdot 2}=\frac{3^{11}}{2^{17}}\right)$

よって $M=\frac{3^{11}}{2^{17}}$ $\left(=\frac{177147}{131072}\right)$ であり、

$\{k\in\mathbb{N}\mid b_k=M\}=\{2,3\}$ である。