]（1） $f(x)=\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ が単調減少

（2） $\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\le\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\le e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$ $(0\le a\le b)$を示せ

（3） $I_n=\int_1^2 e^{-n\frac{t^2}{2}}dt$ のとき、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n$ を求めよ。 $\left(\frac{1}{n}\log(n+1)\to 0\ (n\to\infty)\right)$

（1）

$$f'(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{x}{x^2+1}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-1+\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right)$$

$$=\frac{-2e^{-\frac{x^2}{2}}}{(1+x^2)^2}<0\quad\left(\begin{array}{l}e^{-\frac{x^2}{2}}>0\\1+x^2>0\end{array}\right)$$

より、fは$\mathbb{R}$で単調減少

（2） (1)より、$a\le b$から $f(b)\le f(a)$である。

ここで、

$$f(b)=\frac{-b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}},$$

$$f(a)=\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}$$ より、

$f(a)-f(b)\ge 0$ より、

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ge\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}$$

また、$t\in[a,b]$では、$-\frac{b^2}{2}\le-\frac{t^2}{2}\le-\frac{a^2}{2}$ より、

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\le\int_a^b e^{-\frac{a^2}{2}}dt=e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$ となる。

（3） $I_n=\int_1^2 e^{-\frac{ns^2}{2}}ds$ を $t=\sqrt{n}s$ で置換すると、

$$I_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ となる

ここで(2)において、$b=2\sqrt{n}$, $a=\sqrt{n}$ を代入すると、

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\frac{2\sqrt{n}}{4n+1}e^{-2n}\le\int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\le e^{-\frac{n}{2}}\sqrt{n}$$

式全部を$\sqrt{n}$でわると、

$$e^{-\frac{n}{2}}\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right\}\le I_n\le e^{-\frac{n}{2}}$$

ここで、$\frac{1}{n}\log I_n$を左右から評価すると、

（logは単調増加なので不等号が保存される）

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)\le\frac{1}{n}\log I_n\le-\frac{1}{2}\quad\cdots(*)$$

ここで、

$$\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{n+1}\left\{1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right\}\right)$$

$$=\underbrace{-\frac{\log(n+1)}{n}}_{①}+\underbrace{\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)}_{②}$$

①については、仮定より、$n\to\infty$で0に収束する。

②においては、logの中身が、

$n\to\infty$で $1-\frac{1}{2}\cdot 0=1$ に収束する。

よって②も$n\to\infty$で0に収束する。

よって(*)についてははさみうちの原理が適用できて、

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n=-\frac{1}{2}}$$ となる。

[2] $w=\cos\frac{a\pi}{3+b}+i\sin\frac{a\pi}{3+b}$　(1) $(a,b)=(4,3)$ $z_1\sim z_n$, (2) $(a,b)=(2,1)$ z_{63}

$z_1=1$

$z_2=1-w$　$z_n=(1-w)z_{n-1}+wz_{n-2}$　(3) $a,b\in$ さいころ　$P(z_{63}=0)=?$

(1) $(a,b)=(4,3)$ のとき,

$w=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ となる。このとき,

$z_3=(1-w)^2+w=1-w+w^2=\underline{-2w}$ となる。

($\because w^3=1,\ w\neq1$ より, $w^2+w+1=0$)

$z_4=(1-w)(-2w)+w(1-w)=-w(1-w)$

$=-w+w^2=\underline{-2w-1}$

$z_5=(1-w)(-2w-1)+w(-2w)$

$=-2w+2w^2-1+w-2w^2=\underline{-w-1}.$

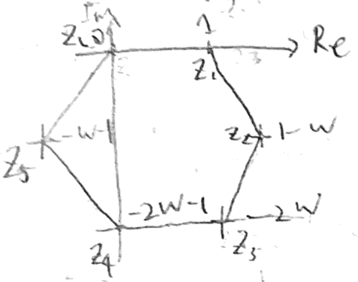
$z_6=(1-w)(-w-1)+w(-2w-1)$

$=-w+w^2-1+w-2w^2-w$

$=-w^2-w-1=0.$

$z_7=(1-w)\cdot0+w(-w-1)=-w^2-w=1.$

よって図示すると



となる。

ここで, z_n の一般項を計算する。

特性方程式の解は $1,\ -w$ なので,

$$\begin{cases} z_n-z_{n-1}=-w(z_{n-1}-z_{n-2}) \\ z_n+wz_{n-1}=z_{n-1}+wz_{n-2} \end{cases}\quad z_1=1,\ z_2=1-w$$

となる。よって

$(z_n-z_{n-1})=(-w)^{n-2}(-w)=(-w)^{n-1}$

$(z_n+wz_{n-1})=1^{n-2}\cdot1=1,\ w$

より) $\quad wz_n-wz_{n-1}=-(-w)^n$

$+)\quad z_n+wz_{n-1}=1$

$(1+w)z_n=1-(-w)^n$

より, $z_n=\dfrac{1-(-w)^n}{1+w}$ となる。($w\neq-1$)

$w=-1$ のとき, $z_1=1,\ z_2=2$

$z_n=2z_{n-1}-z_{n-2}$

であり $z_n=n$ となる。(注 $n=1,2$ でok,

$z_k=k,\ z_{k+1}=k+1 \Rightarrow z_{k+2}=2(k+1)-k$

$=k+2$

より, 帰納法)

(2) $(a,b)=(2,1)$ のとき,

$w=\cos\frac{2}{4}\pi+i\sin\frac{2}{4}\pi=i$ である

ここで, $z_{63}=\dfrac{1-(-w)^{63}}{1+w}=\dfrac{1+w^{63}}{1+w}$ であり,

$w^4=1$ であることから, $w^{63}=w^3$ である。

よって $z_{63}=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

より $z_{63}=i$.

(3) $1+w=1+\cos\left(\frac{a\pi}{3+b}\right)+i\sin\left(\frac{a\pi}{3+b}\right)$

であって, $0\leq\frac{a\pi}{3+b}\leq\frac{6}{4}\pi<2\pi$ より,

$1+w\neq0$ よって

$z_{63}=\dfrac{1-(-w)^{63}}{1+w}=\dfrac{1+w^{63}}{1+w}$ については

$z_{63}=0 \Leftrightarrow 1+w^{63}=0$ となる。

$w^{63}=\cos\left(\frac{63a}{3+b}\pi\right)+i\sin\left(\frac{63a\pi}{3+b}\right)$ より

$z_{63}=0 \Leftrightarrow \frac{63a}{3+b}$ が奇数 となる。

(i) $b=1$ $\frac{63a}{4}$ が奇 $\Rightarrow a=4$ より, 1通り.

(ii) $b=2$ $\frac{63}{5}a$ が奇 $\Rightarrow a=5$ より 1通り.

(iii) $b=3$ $\frac{63}{6}a=\frac{21}{2}a$ が奇 $\Rightarrow a=2,6$ より 2通り,

(iv) $b=4$ $\frac{63}{7}a=9a$ が奇 $\Rightarrow a=1,3,5$ より 3通り

(v) $b=5$ $\frac{63}{8}a$ が奇 $\Rightarrow$ あてはまる a はない 0通り.

(vi) $b=6$ $\frac{63}{9}a=7a$ が奇 $\Rightarrow a=1,3,5$ より 3通り

よって (i)~(vi) より, 全部で10通りだが,

$w=-1$ のとき, $z_{63}=63\neq0$ となるため,

$\frac{a}{3+b}$ が奇数となるとき ($(a,b)=(1,4),(2,5),(3,6)$)

は除外される。

よって答えは

$$\frac{10-3}{36}=\boxed{\frac{7}{36}}$$

[3] $A=\{(s+t,\ st) \mid s^2+t^2\le 6\}$, xy平面. (1) $(2,\sqrt{2})\in A$かどうか. (2) A図示 (3) A: x軸 回転体体積

$x=s+t,\ y=st$ とおく.

(x,y)に対応する$(s,t)\in\mathbb{R}^2$が存在する必要があるため, $(s-t)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2-4y\ge 0$

$\therefore\ y\le \dfrac{x^2}{4}$

また, $s^2+t^2=(s+t)^2-2st$ より

$x^2-2y\le 6$ $\therefore \dfrac{x^2-6}{2}\le y$ よって.

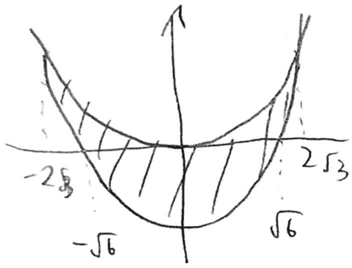
$(x,y)\in A \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6}{2}\le y\le \dfrac{x^2}{4}$ となる.

(1) $(x,y)=(2,\sqrt{2})$ については.

$\dfrac{x^2-6}{2}=-1,\quad y=\sqrt{2},\quad \dfrac{x^2}{4}=1$ より

$y\le\dfrac{x^2}{4}$ でないため, $(2,\sqrt{2})\notin A$である.

(2) $(x,y)\in A \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6}{2}\le y\le\dfrac{x^2}{4}$ を図示すると,



の斜線部分となる (境界は含む).

(3) $x=k$での断面積を$S(k)$とすると.

$V=\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} S(x)\,dx$ である.

ここで, $|x|<\sqrt{6}$について, $\left|\dfrac{x^2-6}{2}\right|=\dfrac{6-x^2}{2}$ であって.

$\left|\dfrac{x^2-6}{2}\right|-\left|\dfrac{x^2}{4}\right|\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{6-x^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{3(4-x^2)}{4}\ge 0$

より. $-2\le x\le 2$.

よって. $|x|\le 2$のとき, $\left|\dfrac{x^2-6}{2}\right|\ge\left|\dfrac{x^2}{4}\right|$

$2\le|x|\le\sqrt{6}$のとき $\left|\dfrac{x^2-6}{2}\right|\le\left|\dfrac{x^2}{4}\right|$ となる.

また Aはy軸について線対称なので,

$V=2\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} S(x)\,dx$ である. ここで.

$S(x)$は

$$S(x)=\begin{cases}\pi\left\{\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^2-\left(\dfrac{x^2-6}{2}\right)^2\right\} & (\sqrt{6}\le x\le 2\sqrt{3})\\ \pi\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^2 & (2\le x<\sqrt{6})\\ \pi\cdot\left(\dfrac{x^2-6}{2}\right)^2 & (0\le x<2)\end{cases}$$

となる. よって.

$$V=\underbrace{2\pi\int_0^2\left(\frac{x^2-6}{2}\right)^2dx}_{①}+\underbrace{2\pi\int_2^{\sqrt{6}}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2dx}_{②}$$

$$+\underbrace{2\pi\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{x^2}{4}\right)^2-\left(\frac{x^2-6}{2}\right)^2\right\}dx}_{③}$$

$①=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^2(x^4-12x^2+36)\,dx$

$=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{5}x^5-4x^3+36x\right]_0^2$

$=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{32}{5}-32+72\right\}=\dfrac{8-40+90}{5}=\dfrac{58}{5}$

$②=\dfrac{1}{16}\displaystyle\int_2^{\sqrt{6}}x^4\,dx$

$=\dfrac{1}{16}\left[\dfrac{1}{5}x^5\right]_2^{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{80}\left\{36\sqrt{6}-32\right\}$

$=\dfrac{9\sqrt{6}-8}{20}=\dfrac{9\sqrt{6}}{20}-\dfrac{2}{5}$

$③=\dfrac{1}{16}\displaystyle\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}(\underbrace{x^4-4x^4}_{-3x^4}+48x^2-144)\,dx$

$=\dfrac{1}{16}\left[-\dfrac{3}{5}x^5+16x^3-144x\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1}{16}\left\{-\dfrac{3}{5}\{288\sqrt{3}-36\sqrt{6}\}+16\{24\sqrt{3}-6\sqrt{6}\}\right.$
$\left.-144(2\sqrt{3}-\sqrt{6})\right\}$

$=-\dfrac{54}{5}\sqrt{3}+\dfrac{27}{20}\sqrt{6}+24\sqrt{3}-6\sqrt{6}-18\sqrt{3}+9\sqrt{6}$

$=-\dfrac{24}{5}\sqrt{3}+\dfrac{87}{20}\sqrt{6}$

よって

$V=2\pi\left\{\dfrac{58}{5}+\dfrac{9\sqrt{6}}{20}-\dfrac{2}{5}-\dfrac{24}{5}\sqrt{3}+\dfrac{87}{20}\sqrt{6}\right\}$

$=2\pi\left\{\dfrac{56}{5}+\dfrac{96}{20}\sqrt{6}-\dfrac{24}{5}\sqrt{3}\right\}$

$=\dfrac{2\pi}{5}\left\{56+24\sqrt{6}-24\sqrt{3}\right\}$

$=\dfrac{16\pi}{5}\left(7+3\sqrt{6}-3\sqrt{3}\right)$

[4] 有理数の木のやつ．（問題文は省略）

(1) 樹形図に出てくる全ての数を $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ と表すことにする．このとき，この中に既約でない分数があるとする．つまり，

$\frac{p}{q}=(p,q)$

$\frac{p}{p+q}=(p,p+q)$ ①　　$\frac{p+q}{q}=(p+q,q)$ ②

①，②のうちのどちらか一方が既約ではないと仮定する．このとき，

①が既約でない→ $\gcd(p,q+p)=g>1$ となるが，このとき，$p=p'g$，$p+q=(p'+q')g$ と書けるが，このとき $q=q'g$ より $\frac{p}{q}$ も既約ではない．$\gcd(p,q)\geq g$

②が既約でない→ $\gcd(p+q,q)=g>1$ だが，$p+q=(p'+q')g$，$q=q'g$ より $p=p'g$ で $\gcd(p,q)\geq g$ より，$\frac{p}{q}$ も既約ではない．

つまり，既約じゃない分数があったとき，その1つ上（つまり親）の分数も既約ではない．これを上にずっとたどっていくと，$\frac{1}{1}$ が既約でないことになるが，これは矛盾．よって樹形図上の全ての分数は既約．

(2) $\frac{p}{q}=\frac{p_0}{q_0}$ $(p_0,q_0>1)$ $\gcd(p_0,q_0)=1$ とする．このとき，(p_n,q_n) を以下のように定める．（$p_n=q_n \Rightarrow p_n=q_n=1$ に注意）

（長さが有限の列）

$$(p_{n+1},q_{n+1})=\begin{cases}(p_n,q_n-p_n) & \left(\frac{p_n}{q_n}<1\right)\\ (p_n-q_n,q_n) & \left(\frac{p_n}{q_n}>1\right)\\ \text{定義しない（有限列が終わる）} & (p_n=q_n=1)\end{cases}$$

このとき，$0<\max(p_{n+1},q_{n+1})<\max(p_n,q_n)$（$\in\mathbb{Z}$）であるため，$\max(p_n,q_n)$ が無限に小さくなることはないため，いつかは列が終わる．また，

$\gcd(p_n,q_n)=\gcd(p_{n+1},q_{n+1})=1$ より，

互除法と同様に，$\forall k\in\mathbb{N}$，$(p_k,q_k)=(1,1)$ となる．

ここで，文字列 S_n を，

$$S_{n+1}=\begin{cases} a\underset{\text{結合}}{+}S_n & \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}<1\right)\\ b\underset{\text{結合}}{+}S_n & \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}>1\right)\end{cases}\quad (n\geq 0)$$

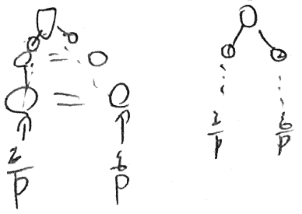
$S_0=\varepsilon$（空文字列）と定めると，

(p_0,q_0) を任意に（$\gcd(p_0,q_0)=1$）とったとき，$\exists k$，$(p_k,q_k)=(1,1)$ となる．このとき，

Sのi文字目が $a\Rightarrow$ 左，$b\Rightarrow$ 右 というように順番に進んでいくと，最終的に (p_0,q_0) に行きつく．（S[m]まで見たとき，(p_{k-m},q_{k-m}) についている）

よって全ての有理数がこの樹形図上にある．

(3) (2)のように，$\frac{q}{p}$ の数に対応する数は決まっている．同じ数が n段目，m段目に現れたとき（$n>m$）m段と同じ構造が n段目の数にも存在するため，$(n-m)$段目に1がでてくることになる．1の数は定義できないため，同じ数が出てくるなら同じ段．しかしその時でも2つの場所から共通祖先をとってくると，



①と②が同じ数になってしまう．これはありえない．

よって樹形図上の有理数は全部ちがう数である．

(4) $\frac{19}{44}$ からはじめて，数を順に求めると

左 ← (7,6) ⑦ ←左 (13,6) ⑧ ←左 (19,6) ⑨ ←左 (19,25) ⑩ ←左 (19,44) ⑪

(1,6) → (1,5) → (1,4) → (1,3) → (1,2) → (1,1)

⑥ 左 ⑤ 左 ④ 左 ③ 左 ② 左 ①

となる．よって $\frac{19}{44}$ は11段目にあって．

(1,6)：6段目の1番目
(7,6) 7段目の2番目
(13,6) 8〃の4〃
(19,6) 9〃の8〃
(19,25) 10〃の15〃
(19,44) 11〃の29〃

よって $\frac{19}{44}$ は11段目の左から29番目にある．

[5] $S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$, $S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$

(1) $C=S_1\cap S_2$ (1) $\min r$ $S(r)\cap S_1=C$ (2) $S(r)\cap S_1=C$ かつ $r=\sqrt3$

$(x,y,z)\in S_1\cap S_2$ ならば、

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-4=0$

$-)\ x^2+y^2+z^2-4x-6y-6z+21=0$

$2x+4y+4z-25=0$

より、$C\subset\{(x,y,z)\mid 2x+4y+4z=25\}$

である。また、球を平面で切った切り口は円であり、その円の中心は、$(1,1,1)$ と $(2,3,3)$ を結ぶ線上つまり

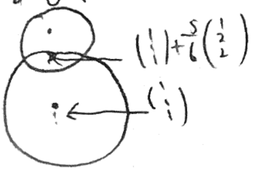
$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}$ 上にある。

この直線と平面の交点は、

$2(1+t)+4(1+2t)+4(1+2t)=25$

$\Leftrightarrow 2+4+4+18t=25$ より、$t=\frac{5}{6}$

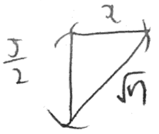
よって切り口は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{5}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ を中心とする円である。この円の半径は、図から、三平方の定理を使うと、



$7-\left(\frac{5}{2}\right)^2=x^2$

$x^2=\frac{3}{4}$ $x>0$ より、

$x=\frac{\sqrt3}{2}$ となる。



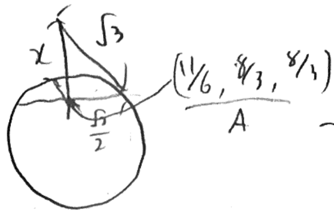
よってCは $\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix}11/6\\8/3\\8/3\end{pmatrix} \text{を中心として、半径が} \frac{\sqrt3}{2} \text{で、}\\ 2x+4y+4z=25 \text{ 上にある円}\end{array}\right.$

である。よって(1)から、Cを含む球面は最低でも半径が $\frac{\sqrt3}{2}$ 以上でなくてはいけない。一方で、半径が $\frac{\sqrt3}{2}$ で $\begin{pmatrix}11/6\\8/3\\8/3\end{pmatrix}$ を中心とする球 S_3 はCを含み、$S_3\cap S_1=C$ である。よって(1)の答えは、

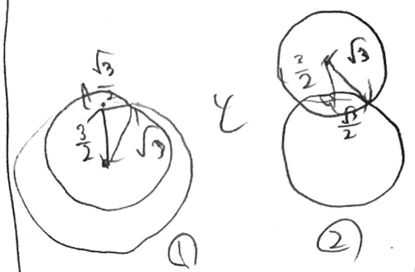
$$\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{3}{4}$$

である

(2) S_1 との共通部分がCとなるためには、球の中心は $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}$ 上になくてはいけない。このもとで、半径が $\sqrt3$ となるものを求める。図にすると、以下のようになるため、



x としてありうるのは $x^2=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$ より、$x=\pm\frac{3}{2}$ よって



の2通りが考えられる

ここで、$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\1\\1\end{pmatrix}$ の長さは $\sqrt{\frac14+1+1}=\frac{3}{2}$ であるため、球の中心の座標としてあるものは、

$\begin{pmatrix}11/6\\8/3\\8/3\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}\frac12\\1\\1\end{pmatrix}$ である。

$=\begin{pmatrix}7/3\\11/3\\11/3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4/3\\5/3\\5/3\end{pmatrix}$ よって球面の方程式は、

$$\left\{\begin{array}{l}\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3\\ \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3\end{array}\right.$$

の 2つである。