京大 問1

[1] $\cos\theta = x$ とすると $\cos 2\theta = 2x^2-1$, $\cos 3\theta = 4x^3-3x$ より.

$x \notin \mathbb{Q}$ だが, $2x^2-1 \in \mathbb{Q}$, $4x^3-3x \in \mathbb{Q}$ となる $x \in [0,1]$ について考える.

$2x^2-1 \in \mathbb{Q}$ より, $2x^2-1 = \frac{q}{p}$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ としたとき, $x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}+1\right) = \frac{p+q}{2p}$ より $x^2 \in \mathbb{Q}$ また,

$4x^3-3x = x(4x^2-3)$ についても, $4x^2-3$ が有理数となる. しかし,

$x \notin \mathbb{Q}$ であるため, $(4x^2-3) \neq 0$ であるとき, $x(4x^2-3) \notin \mathbb{Q}$ となってしまう. よって

$4x^2-3=0$ である $0 \leq x \leq 1$ より.

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ が必要条件である. このとき,

3は平方数でないので $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ より $x \notin \mathbb{Q}$.

また, $2x^2-1 = 2\cdot\frac{3}{4}-1 = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$,

$4x^3-3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 = 0 \in \mathbb{Q}$ となり

条件をみたす. よって $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ が必要十分であるため, $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$ である.

[2] (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot(\tan x)'\,dx$

$$= \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{-\cos x}\,dx \qquad -\cos x = t,\ \sin x\,dx = dt$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \Big[\log t\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 + \log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$\sin x = t$ $dt = \cos x\,dx$ より

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2}\,dt.$$

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} \quad \text{より.}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log|t+1| - \log|1-t|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\log\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) - 0\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{1}{2}\log\left((\sqrt{2}+1)^2\right)$$

$$= \boxed{\log(1+\sqrt{2})}$$

京大問2

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$

$f'(x) = 3x^2 + 4x$　　$\therefore f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, -\frac{4}{3}$

$f(0) = 2$, $f(-\frac{4}{3}) = -\frac{64}{27} + \frac{32}{9} + 2$

$= \frac{-64+96+54}{27} > 0$.

ここで，$f(-2) = 2$, $f(-3) = -7$ であって

fの増減表をかくと，

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	0
f	-7	↗	2	↗	正	↘	正
f'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0

よって．

$n \in \mathbb{Z}$については，

$\begin{cases} f(n) \geq 0 & (n \geq -2) \\ f(n) \leq 0 & (n \leq -3) \end{cases}$ となる．

このとき，$k \in \mathbb{Z}$について，

$f(2k) = 8k^3 + 8k^2 + 2 \equiv 0 \pmod 2$

$f(2k+1) = (2k+1)^3 + 2(2k+1)^2 + 2 \equiv 1 \pmod 2$

である．

nと$n+1$のどちらかが偶数なので，

それを$2m$とおくと，$f(2m)$は2の倍数

なので，$|f(2m)|$が素数になるためには，

$f(2m) = \pm 2$でなくてはいけない．

ここで，$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 = 0$

$\Rightarrow x = 0, -2$．

$f(x) = -2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4 = 0$

ここで，$f(x)+2$については，$x = -\frac{4}{3}$で極大，

$x = 0$で極小と

なるが，$f(-3) = -5 < 0 < 4 = f(-2)$ より，

$f(n) = -2$ をみたす整数nは

存在しない．

よって $n, n+1$ のどちらかは

$0, -2$ である．このとき，

$f(-1) = 3$, $f(1) = 5$, $f(-3) = -7$

でどれも素数である．

よって

$(n, n+1) = (-3, -2)(-2, -1)(-1, 0)$

$(0, 1)$

のとき，$|f(n)|$, $|f(n+1)|$のどちらも

素数となる．

$\therefore \underline{n = -3, -2, -1, 0}$．

京大問3

Cを原点にとり，$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$とする．

このとき，$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$を　　注：($\varphi(C)=(0,0)$)

$(p\vec{a}+q\vec{b})\mapsto(p,q)$，

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$を

$(p,q)\mapsto(p\vec{a}+q\vec{b})$とすると，

$\{\vec{a},\vec{b}\}$は一次独立なので全単射となる．

また，$f\circ\varphi=Id_{\mathbb{R}^2}$，$\varphi\circ f=Id_{\mathbb{R}^2}$となる．

ここで，$\varphi(\triangle ABC)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix}0\le x,y\\ x+y\le 1\end{matrix}\right\}$

となる．このとき，

$\overrightarrow{CQ}=(1-t)\vec{a}$より

$\overrightarrow{CP}=(1-t)\vec{b}+t\overrightarrow{CQ}$

$=(1-t)(t\vec{a}+\vec{b})$　より．

$\varphi(\overrightarrow{CP})=((1-t)t,\ 1-t))$である．

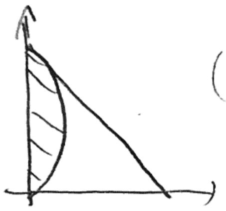
$\underset{(0\le t\le 1)}{\varphi(\overrightarrow{CP})}$の軌跡は，

$x=(1-t)t$，$y=(1-t)$　より．

$x=y\cdot(1-y)=y-y^2$である．

求めるべき領域をDとおくと，

$\varphi(D)$を図示すると



斜線のようになる．また．

($x+y=1$　また $x=1-y$ より $(1-y)^2=0$
$x=y-y^2$)

$(y-y^2)'\big|_{y=1}=-1$　より．

これは辺ABに接している．

ここで，$\varphi(D)$の面積は．

$M(\varphi(D))=\int_0^1 y(1-y)\cdot dy$

$=\dfrac{1}{6}$　となる

次にM(D)を求める．

$M(D)=\iint_D dx\,dy$

ただし$(p,q)=\varphi(x,y)$とおくと

$dx\,dy=|J(\varphi)|\cdot dp\,dq$　より．

$(x,y)\in D \Leftrightarrow (p,q)\in\varphi(D)$で

あることから．

$M(D)=\iint_{\varphi(D)}|J(\varphi)|\cdot dp\,dq$

$=|J(\varphi)|\cdot M(\varphi(D))$　となる

ここで，$|J(\varphi)|$は$\vec{a}$と$\vec{b}$がなす

平行四辺形の面積に等しいため．

$|J(\varphi)|=2S$である．

また，$M(\varphi(D))=\dfrac{1}{6}$より

$M(D)=\dfrac{1}{6}\cdot 2S=\underline{\dfrac{1}{3}S}$

京大問4.

$x_{k-1} \geq 5$ かつ $x_k \leq 4$ となるパターンが2つ以上あるとすると、($k_1 < k_2$ の2つで)

$x_{k_1-1} \geq 5$ かつ $x_{k_1} \leq 4$,

$x_{k_2-1} \geq 5$ かつ $x_{k_2} \leq 4$

$0 \leq k \leq k_1 - 1$, $k_1 \leq k \leq k_2 - 1$ の各区間でそれぞれ1つ以上 $x_{k-1} \leq 4$ かつ $x_k \geq 5$ となるため、条件が満たされない.

また「5以上から4以下になるパターン」は、「4以下から5以上となるパターン」より後でなくてはいけない($\because x_0 = 0$)

よって条件を同値なものにいいかえると、

ある $1 \leq i < j \leq n$ があって、

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq i-1 \text{ なら } x_k \leq 4 \\ i \leq k \leq j-1 \text{ なら } x_k \geq 5 \\ j \leq k \leq n \text{ なら } x_k \leq 4 \end{cases}$$ となる.

(i, j): fixed に対してこれが成立する確率 $P_{ij} = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{j-i} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-j}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+i-j} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{j-i}$ となる.

よって求めるべき確率は

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+i-j} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{j-i} \quad ①$$

となる

① について 3^n でくくると、

$$① = \frac{1}{3^n} \sum_{i=1}^{n} 2^{n+i} \underbrace{\left(\sum_{j=i+1}^{n+1} 2^{-j}\right)}_{②}$$ となる.

② については等比数列の和より、

$$\sum_{j=i+1}^{n+1} 2^{-j} = 2^{-i-1} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{i} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$ となる.

よって ① は

$$\frac{1}{3^n} \sum_{i=1}^{n} 2^{n+i} \left(2^{-i} - 2^{-n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3^n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(2^n - 2^{i-1}\right)}_{③}$$ となる.

③ については、

$$\sum_{i=1}^{n} 2^n = n \cdot 2^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$$ より、

$$① = \frac{1}{3^n} \{ n \cdot 2^n - 2^n + 1 \}$$

$$= \frac{(n-1)2^n + 1}{3^n}$$ となる.

京大ⅾ75

$AB_1B_2B_3B_4$ をうまく回転させることで、$B_1B_2B_3B_4$ を xy 平面と平行にすることができる。(かつAもBiよりも上に) このときの B_i ($i=1\sim4$) の z 座標を h とする $(-1<h<1)$ また、このとき、点Aの z 座標は k とおく $(h<k\leq1)$

このとき、$x^2+y^2+z^2\leq1$ を $z=h$ で切断したときの断面は円 $x^2+y^2\leq1-h^2$ である (つまり半径 $\sqrt{1-h^2}$ の円) B_i ($i=1\sim4$) はこの円上にあって正方形をなしているので、

つまり、この正方形は円に内接している。このとき一辺の長さは $\sqrt{2}\sqrt{1-h^2}$ より、面積は

$2\cdot|1-h^2|=2(1-h^2)$ となる($\because|h|<1$)

よって四角錐の体積は、

$2(1-h^2)\cdot(k-h)\cdot\frac{1}{3}$ ここで

h: fixed で k を動かしたとき、

$k=1$ のとき明らかに max となるため

$\underset{-1<h<1}{\max}\ \frac{2}{3}(1-h)^2(1+h)$ を考えればよい。

$f(h)=(1-h)(1-h^2)=1-h-h^2+h^3$

であり、

$f'(h)=3h^2-2h-1$

$=(3h+1)(h-1)$ となる。

よって $f'(h)=0 \iff h=-\frac{1}{3},1$

増減表をかくと、

h	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
f'	$+$	$+$	0	$-$	0
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

より

$h=-\frac{1}{3}$ で

f: max となる

$h(-\frac{1}{3})$

$=(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{9})$

$=\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9}=\frac{32}{27}$.

よって

$V_{max}=\frac{2}{3}\cdot\frac{32}{27}=\frac{64}{81}$

である。

京大問6

$(1+i)^n+(1-i)^n$

$=\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n+\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n$

$=\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)+\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}^n\cdot 2\cos\frac{n\pi}{4}$

$=2^{\frac{n}{2}+1}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$ となる.

このとき,

$2^{\frac{n}{2}+1}>10^{10}$ をみたす最小のnをまず求める (※)

$2^{\frac{n}{2}+1}>10^{10}$ の両辺に常用対数をとって

$10\log 10<\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\log_{10}2$

$10<n\frac{\log_{10}2}{2}+\log_{10}2$

$20-2\log_{10}2<n\log_{10}2$ より,

$n>\frac{20}{\log_{10}2}-2$ となる.

問題文より次ページの常用対数表によると,

$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ より

$64.423<\frac{20}{\log_{10}2}-2<64.445$

より. (※)の答えは $n=65$ である.

このとき, $2^{33.5}>10^{10}>2^{33}$

を満たす.

このとき,

$\cos\frac{65\pi}{4}=\cos\left(\left(16+\frac{1}{4}\right)\pi\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

より, $(1+i)^{65}+(1-i)^{65}=2^{33}<10^{10}$ である.

$n=66$については.

$\cos\frac{66}{4}\pi=\cos\frac{33}{2}\pi=\cos\frac{\pi}{2}=0$

$n=67$については.

$\cos\frac{67}{4}\pi=\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}<0$

$=68$	-1
$=69$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$=70$	0
$=71$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる.

$n=71$については.

$(1+i)^n+(1-i)^n$

$=2^{\frac{71}{2}+1}\cos\frac{\pi}{4}$

$=2^{\frac{71}{2}+1}\,2^{-\frac{1}{2}}=2^{36}>2^{33.5}>10^{10}$

である.

よって条件をみたすnは $n=71$ である.