三角関数の定義についての問題

しゃかやみ (@shakayami_)

2020 年 2 月 6 日

目次

1　はじめに

三角関数といえば、1999 年の東大の入試問題に加法定理を証明させる問題が出たことは一部の界隈にとっては有名なことだ。この問題は「教科書に書いてある通り」に解答を書けばよいのだが、やっぱり別解を考えたくなってしまうものである。（天邪鬼なので）しかし問題点があって、下手に別解を考えると循環論法に陥ってしまうという危険性がある。これを回避するために三角関数を定義づけることから始めてこれらの証明問題について議論していこう。

2　三角関数の定義を問う入試問題の例

三角関数の根幹的なことを問う問題といえば 1999 年の東大の入試問題の他に 2013 年の大阪大学の入試問題が有名である。

問題 1

(1) 一般角 θ に対して $\sin\theta, \cos\theta$ の定義を述べよ。

(2) 1. で述べた定義にもとづき、一般角 α, β に対して

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

(1999 東京大学文理 1)

問題 2 三角関数の極限に関する公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

を示すことにより、$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを示せ。

(2013 年大阪大学理系 1)

この問題を見た場合、解答を埋めるのはそこまで難しくない。しかしこの問題の何が難しいかというと循環論法に陥りやすいことである。三角関数の公式の多くは加法定理や $\sin x/x$ の極限公式から導くことができるのである。ということはそれらの多くの公式が問題を解くのに使えないのである。証明問題と言ってもベタなやつとは別物なので普段から使っているテクニックがこの問題に対しては使えないのである。入試のことは深く把握していないので深い言及は避けるが、これらの基本的な公式の証明を問う問題の対策は教科書をそのまま覚えるのが最も得策だと考える。

2.1　解答例

とりあえず両問題の解答を以下に示す。

2.1.1　東京大学の方

(1) xy 平面上の単位円を考える。点 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{X}(1,0)$ について、X を O を中心として角 θ だけ反時計回りに回転移動させた点を A とおき、A の x 座標を $\cos\theta$,y 座標を $\sin\theta$ と定義する。

ここで、「$-\theta$ だけ反時計回りに回転移動させた」とは「θ だけ時計回りに回転移動させた」と定める。よって「θ だけ回転移動させた点」と「$-\theta$ だけ回転移動させた点」は最終的に x 軸に対して対称の関係にある。よって

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

となる。また、$y=x$ についての対称移動を考えると

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta, \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

となっている。
(2) xy 座標平面上において、点 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(\cos\alpha, \sin\beta), \mathrm{B}(\cos\beta, \sin\beta)$ を考える。(このとき、$\beta \geqq \alpha$ としても一般性を失わない。) このとき、$\mathrm{OA}=1, \mathrm{OB}=1$ であり、(A, B は $(1,0)$ を回転移動させた先の点であることから明らか) 座標平面上の距離の公式から

$$\mathrm{AB}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

となる。

一方、$\angle\mathrm{AOB} = \beta - \alpha$ となるため、余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos(\beta - \alpha)$$

となる。よって AB^2 についての 2 式を比較することにより、

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

となる。ここで $\alpha \geqq \beta$ の場合についても、

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$$

となるため cos のマイナスについての加法定理が成立することが示された。

cos のプラスについては先程示した式について $\beta \to -\beta$ として $\sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta$ という関係式を使えばよい。

また、$\sin\theta$ の加法定理については関係式

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta$$

を使用することで、

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha(-\sin\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

となる。

2.1.2 大阪大学の方

O を中心とする単位円周上の点 A, B について考える。このとき $\angle\mathrm{AOB} = \mathrm{x}, (0 < \mathrm{x} < \frac{\pi}{2})$ を満たしているとする。このとき三角形 OAB の面積は $\frac{1}{2}\sin x$, 扇形の面積は $\frac{1}{2}x$, そして OB の B を通る垂線と直線 OA の交点を C とおくと、三角形 OBC の面積は $\frac{1}{2}\tan x$ となる。(このとき、$\angle\mathrm{OBC}$ は直角になる!)

このとき $0 < x < \frac{\pi}{2}$) について以下の不等式が成立する。

$$\sin x < x < \tan x$$

$\sin x > 0$ であるため両辺を $\sin x$ で割っても不等式の順番は保存されるので、

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

となる。$x \to +0$ のとき左辺・右辺ともに 1 に収束するので、はさみうちの原理より、

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

が成立する。

注意してほしいのは、現時点で示せているのは右側の極限だけであるということである。題意の式を示すためには左側極限も等しいことを示さなければいけない。とは言っても、左側極限を示すことはそれほど難しいことではない。以下の式から示すことができる。

まず、t を $-\dfrac{\pi}{2} < t < 0$ を満たすとして、

$$\begin{aligned}\lim_{t\to -0}\frac{\sin t}{t} &= \lim_{x\to +0}\frac{\sin(-x)}{(-x)} \quad (x=-t, t\to -0 \Leftrightarrow x\to +0)\\ &= \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\\ &= 1\end{aligned}$$

よって左側極限も右側極限も等しいので、極限の式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が成立する。

次に、$\sin x$ の導関数について考える。(ここまで来ればかんたんである。)

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}\\ &= \sin x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right)\\ &= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\ &= \cos x\end{aligned}$$

よって $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることが示された。ここで、

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\frac{1}{1+\cos h}\sin h = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

を使っている。

3 循環論法の恐怖

この節ではこれらの問題における「循環論法になってしまった」解法を紹介しよう

3.1 加法定理における循環論法

複素数の回転を使った解法は循環論法な例として知られている。具体的な解法は以下のとおりである。

だめな解法

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

は複素平面上で θ だけ回転移動させる操作と対応する。つまり複素数に z を掛けると、その複素数は複素平面上で θ だけ回転移動する。よって

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\ &= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

よって $\sin\alpha, \sin\beta, \cos\alpha, \cos\beta$ は実数であるから実部と虚部が比較することで、加法定理を示すことができる。

複素数の積が回転移動するということは加法定理から証明されるため、この証明は循環論法となって不適切だ。つまり「複素数の回転は加法定理から証明される」のに、「加法定理が複素数の回転で証明される」ようなことが起こってしまうのである。これを回避するためには複素数の回転のことを加法定理を使わずに証明すればよい。「複素数の回転」というと漠然としているが、要はオイラーの公式である。オイラーの公式をどうにかして示してそこから加法定理を証明するという流れで示せば循環論法は避けられる。

3.2 極限の式に関する循環論法

高校数学界隈においては「極限の式 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ の教科書の証明は循環論法である！」という主張する勢力が存在する。「教科書の証明」とは前節で示したことそのままなのだが、その勢力が証明を循環論法としている理由は扇形の面積の求

め方にある。扇形の面積の公式は円の面積から角度に対応する割合だけ変えるようなことをして導く。問題は円の面積の公式である。円の面積は小学校の算数でやるにも関わらず証明に極限の計算じみたことをやってのけているのである。（よって円の面積の公式の求め方がわからなくても仕方のないことなのかもしれない？）

とにかく、円の面積の公式の導出を高校数学っぽく書いてみよう。以下がその導出過程である。

円の面積の公式の証明（？）

半径 r の円の面積は、円に内接する正 n 角形の面積で下から、円に外接する正 n 角形の面積で上から抑えることができる。よって半径 r の円の面積を S とおくと、

$$r^2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot 2n \leqq S \leqq \frac{1}{2} r^2 \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot 2n$$

はさみうちの原理を用いると

$$S \to \pi r^2 (n \to \infty)$$

となる。

もちろん上記の証明には求めるべき極限の式を使ってしまっているので、「$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を証明するために必要な円の面積の公式の証明に $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$」を使っているので、「$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ から証明されてしまう」ということになってしまう。

しかし実際には循環論法を回避する手段があって、円の面積を別の方法で証明すればいいらしい。これは詳しい人が解説してるだろう（投げやり）

ところで以降の節では循環論法の回避方法を記述する。しかし「円の面積の別証明」とは別のアプローチで行こうと思っている。

4　循環論法を解消するには　〜オイラーの公式〜

加法定理の証明の別解を考えるためにはオイラーの公式をどうにかして示すのが得策と言った。

ここでオイラーの公式について復習すると

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

である。

これの証明については有名なものではテイラー展開を使うものだろう。$\sin x, \cos x, e^x$ のような関数は、多項式の無限和

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

のように表すことができて、これの e^x の x の部分に ix をぶち込んで $\cos x + i \sin x$ と比べたら、形式的なべき級数として等しくなるため等式が成立する。という感じの証明である。

一般向けの解説書ではこれで終わっているのだが、ここではもう少しだけ厳密性を追求してみることにする。この証明を厳密にするとしたら、無限級数の足す順番を変えていいかどうか（絶対収束が示せれば分かる）ということらへんを示すだが、まずはテイラーの定理について考えてみることにする。

テイラーの定理・テイラー展開

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) 上で n 回微分可能であるとする。このとき、

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる $c, (a < c < b)$ が存在する。特に b を変数 x で置き換えることで $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ であるとすれば、f はテイラー展開可能となる。

上記の定理について、任意の自然数 n について、$|f^{(n)}(x)| \leqq g(x)$ となる関数 g が存在すれば R_n は $n \to \infty$ で 0 に収束するため晴れてテイラー展開可能となるわけである。それは以下の極限の式が成り立つから分かる。この式の証明は高校生でも頑張ればできると思うので自分でやってみよう。(ここで、a は n に依らない定数である。)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

そして、$f(x) = \sin x, \cos x$ の場合、$|f^{(n)}(x)| \leqq 1$ のため $g(x) = 1$ とすればよく、$f(x) = e^x$ については $|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leqq e^x$ より $g(x) = e^x$ とすればいいので、$\sin x, \cos x, e^x$ は晴れてテイラー展開可能ということになる。

話がそれたので本題（循環論法の解消）に戻すと、残念ながらこのままでは循環論法を解決することはできない。なぜならばテイラー展開の式を構成していく過程で、$f'(a)$、つまり三角関数の導関数について考える必要が出てきてしまう。三角関数の導関数については先程大阪大学の問題を解くときに使ったように、加法定理を使ってしまっている。つまり、「加法定理を証明するためのオイラーの公式を証明するためのテイラーの定理を適用するための三角関数の微分を計算するために加法定理を使っている」ため、「加法定理は加法定理から証明される」と言っているようなものになってしまう。

このような循環論法を防ぐために、とりあえずオイラーの公式を別の手段で求めるという手筋でいくことを考えよう。

4.1 複素数の微積分について

以下の証明をうまくやるためには、複素数での微積分についてきちんと定義しておく必要がある。しかしオイラーの公式の証明をするためにはそれほど小難しいことは考えない。以下がわかっていればいいだろう。

前提として、$x(t), y(t)$(t は実数) を実数値を返す微分可能な関数、$z(t)$ を複素数地を返す関数として、$z(t) = x(t) + iy(t)$ とする。そして、

$$\int_0^s x(t)dt = X(s)$$
$$\int_0^s y(t)dt = Y(s)$$

が成り立っているとする。このとき、$z(t)$ の微分と積分はそれぞれ、

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$
$$\int_0^s z(t)dt = X(s) + iY(s)$$

と定義する。このように定義さえできればあとは実数値関数の微分積分と同じようなノリで計算することができるだろう。

4.2 オイラーの公式の証明その 1〜微分

関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{\cos x + i\sin x} = \frac{e^{ix}(\cos x - i\sin x)}{\cos^2 x + \sin^2 x} = e^{ix}(\cos x - i\sin x)$$

ここで $f(x)$ が定数関数で常に 1 であることを示せばよい。とりあえず導関数を計算してみる。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (e^{ix})'(\cos x - i\sin x) + e^{ix}(\cos x - i\sin x)' \\
&= ie^{ix}(\cos x - i\sin x) + e^{ix}(-\sin x - i\cos x) \\
&= e^{ix}\left(i\cos x + \sin x - \sin x - i\cos x\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって $f'(x) = 0$ より $f(x)$ は任意の実数について定数値を取る。（注意：ここでは実数値から複素数値への関数を考えているので任意の複素数 z について $f(z)$ が定数であることを示せたわけではない。まあ、本当は成り立つけど）ここで、$f(0) = 1$ であることは簡単にわかるため、全ての実数 x について $f(x) = 1$ よって $\cos x + i\sin x \neq 0$ より両辺に分母を掛けると $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ となる。（証明終わり）

もちろん勘の良い読者ならすでに気がついているだろうが、これもダメである。何故ならば証明に三角関数の微分を使ってしまっているからだ。よって「加法定理を証明するためのド・モアブルの定理を証明するためのオイラーの公式を証明するための三角関数の微分公式を証明するための三角関数の極限公式を証明するために三角関数の加法定理を使ってしまっている」ため、これも結局「加法定理は加法定理から証明されてしまう」のであり、残念ながらこれも見事循環論法となって散ってしまったのである。

さらに問題点がある。この証明では指数関数の微分公式を暗黙の了解として使ってしまった。係数が複素数だとしても実数のときと同じように微分公式が使えたり、はたまた指数法則を適用できるかについても考え直す必要がある。これについては次章以降で明らかになる。

4.3 オイラーの公式の証明その 2〜積分

以下の方法は筆者が高校時代に発見（？）して記録されていたものをそのまま引っ張り出して持ってきたものである。(注意：これは筆者自身が編み出した手法であると思ってはいたが、調べた結果 1702 年にヨハン・ベルヌーイという人物が考えた発想と似ているとのことなので完全オリジナルと言うべきではない。つまり、車輪の再発明というのが妥当な表現だろう。)

まずは、次の積分公式があることを前提としよう。（数 III で出てきがちな問題であるため、詳細は省略する。）ここで、x は正の実数、a は 0 でない複素数としよう。（複素数でも成り立つかどうかは先程の複素数での積分の定義を考えれば良いだろう。）

$$
\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x + C
$$
$$
\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C
$$

（ただし、C を積分定数とする。）ここで、$a = i$ としてみる。すると以下の通りに式変形をすることができる。

$$
\int \frac{dt}{t-(i)^2} = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{x^2-1-2xi}{x^2+1}\right)
$$
$$
2i\arctan x = \log\left(\frac{x^2-1-2xi}{x^2+1}\right)
$$

ここで、θ を、

$$
\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
$$

となるように定める。（任意の実数 x についてこのような $\theta, 0 \leqq \theta \leqq \pi$ が存在することは保証される。）

このとき、$\sin\theta > 0$ より $0 \leqq \theta \leqq \pi$ であり、$\tan\theta = \dfrac{1}{x}$ であることから

$$
\arctan x = \frac{\pi}{2} - \theta
$$

となる。また、

$$
\cos 2\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \sin 2\theta = \frac{2x}{x^2+1}
$$

であることなどを利用すると、

$$\begin{aligned}
2i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \log\left(\cos 2\theta - i\sin 2\theta\right) + C \\
i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \log\cos\theta - i\sin\theta + \frac{C}{2} \\
\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) &= \left(\cos\theta - i\sin\theta\right)\exp\left(\frac{C}{2}\right) \\
\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)\exp\left(\frac{C}{2}\right)
\end{aligned}$$

ここで、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ とおくと、(左辺)=(右辺) より、$\exp\left(C/2\right) = i$ であるとわかる。よってこのとき、$0 < \theta < \pi$ かつ $0 < \pi/2 - \theta < \pi$, つまり $0 < \theta < \pi/2$ を満たすときに、$\exp i\theta = i(\sin\theta - i\cos\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ が成立する。また、任意の実数 t について $0 \leqq t/n \leqq \pi/2$ となる整数 n が存在するので、

$$\exp\left(\frac{it}{n}\right) = \cos\left(\frac{t}{n}\right) + i\sin\left(\frac{t}{n}\right)$$

となり、両辺を n 乗すると、$\exp\left(it\right) = \cos t + i\sin t$ が成立する。(証明終)

ところで、長々と証明を書いてしまって残念なお知らせだが、この証明でも循環論法は解決できてない。最後の n 乗するときにド・モアブルの定理を使っているのである。よって「加法定理を証明するためのド・モアブルの定理を証明するためのオイラーの公式を証明するためにド・モアブルの定理を使っている」ので、「ド・モアブルの定理はド・モアブルの定理から証明できる」と言ってしまったようなものである。

それだけではない。さらに深刻な問題がある。それは複素数における対数関数についての考察がずさんであるということだ。対数関数の引数に複素数を入れたものはどのような挙動をするかについてで厳密性を失っているのだ。

とにかく、これまでオイラーの公式を使っていろいろと試してみたが、やはり加法定理を証明するために複素数に持ち込むのは賢い手段とはいえないだろう。というのも、実数値で考えられた指数関数や三角関数を複素数値でも定義できるようにするためには複素解析の知識が必要となり、そこでどうしても微分を使わざるを得なくなる。よってそこでどうしても加法定理が登場して循環論法に巻き込まれるというオチになってしまうのである。そうすれば、複素数から加法定理を示す場合循環論法を消すのが困難となるため、「加法定理を示せ」という問題は、座標平面上におく方法しか解法が無いのではないだろうか？

いや、別解は存在する。次章ではそれらの別証明をいくつか紹介しよう。どうやって循環論法を避けたのか？ヒントは「三角関数の定義」である。

5　別解たち

以下に上げる別解では、三角関数を一見おかしな感じで定義する。よってそれが今まで我々が扱ってきた三角関数と同じことを示す必要がある。しかしそれは $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ と加法定理が示せれば OK となる。よって以下の別解集は「ぼくのかんがえたさいきょうのさんかくかんすう」が実際の三角関数と一致していることを確かめる作業と思えばよい。

5.1　別解 1　～三角関数を逆関数として定義する～

天下り的だが次の積分について考えてみよう。

$$\int_0^{\sin\alpha}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\alpha} d\theta = \alpha \qquad (t = \sin\theta)$$

三角関数を定義しているはずなのに冒頭からいきなり三角関数が出ているのはおかしいと思うが、左辺の積分について三角関数が出現している場所は積分区間の部分しかない。ここで、次のように書き換えてみよう。

$$s(x) = \int_0^{x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, (x \in I = [-1, 1])$$

この式については三角関数は出現していない。これを三角関数の定義の出発点とする。ここで、「$s(x)$ の逆関数が $\sin x$ である」と定義すればうまくいきそうな気がする。しかしここで気をつけなければいけないのが逆関数の定義についてである。

逆関数の定義

関数 $f: I \to J$(注：このとき、I は f の定義域、J は f の値域である) について、$Y \subset J$ の逆像を $f^{-1}(Y) = \{x \in I | f(x) \in Y\}$ と定義する。このとき、任意の $y \in J$ について $f^{-1}(\{y\})$ の要素数が 1 である場合、f の逆関数 $f^{-1}: J \to I$ を定義することが可能となり、$f^{-1}(y)$ は $f^{-1}(\{y\})$ の唯一の要素の値を取る。

関数とは与えられた x について、ただひとつの y を対応させるというものであるため、y に対応する x がちょうど 1 つ (0 個でも 2 個以上でもいけない！) ないと逆関数というものを定義することができないのである。ちなみに数学の用語でちょうど一つだけ対応することを「全単射」という。(「全射」は $f^{-1}(\{y\})$ の要素が「0 個にはならない」ことを意味して、「単射」は $f^{-1}(\{y\})$ の要素数が「2 個以上にはならない」ことを意味していて、「全単射」は「全射でありかつ単射である」ことを意味している。) また、逆像の定義に入っているものが y ではなく $\{y\}$ であるのも誤植ではない。y は実数であり、$\{y\}$ は集合である。逆像は集合に関して定義されて、それにともなってただ 1 つの集合を返す「関数」である。逆関数とは、逆像がいい感じの性質を持っている時に定義されるものだということになる。

そこで、$s(x)$ はうまく逆関数を定義することができるかについて考えてみよう。まずは $s(x)$ の値域について考えてみる。微分積分学の基本定理（微分は積分の逆演算であるということ）より、$s'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ となり、$s(x)$ は狭義単調増加であることが分かる。よって $s(x), x \in I$ は最大値・最小値が存在した場合、最大値は $s(1)$ となり、最小値は $s(-1)$ となる。

次に収束性について考えてみる。$s'(x)$ に $x = 1, -1$ を代入した場合、極限値 $\displaystyle\lim_{h \to +0} s'(1-h), \lim_{h \to +0} s'(-1+h)$ はともに発散してしまう。よって $s(1), s(-1)$ が有限の値を取るかどうかを安直に断言することができないのである。ここで、$\displaystyle s(1) = \lim_{c \to 1-0} s(c), s(-1) = \lim_{c \to -1+0} s(c)$ と定義しよう。つまり $s(x)$ が I 上で連続になるように $s(1), s(-1)$ を定義するということだが、これらの積分には広義積分という。普通の積分は区間内有界な関数について定義されているが、広義積分は「区間内有界な関数の積分」の列の極限としている。以降は広義積分のときに極限記号を省略する場合があるので注意してほしい。(もちろんだが、三角関数で置換できるから楽勝じゃんｗｗとか思ってはいけない。いまやろうとしていることは三角関数を定義することなので、現時点で三角関数は知らないものでなくてはいけないのだ。よって積分の収束についても三角関数を全く使わない証明をしなくてはいけない。)

ところで、$x \in I = [-1, 1]$ について $x^2 \leqq |x|$ であることを利用すると、被積分関数は $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-|x|}}$ という性質が成り立つ。よって、

$$s(1) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leqq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-|x|}} = \left[2\sqrt{1-x}\right]_0^1 = 2 < \infty$$

より広義積分が収束することを示すことができた。$s(-1)$ についても同じような変形を行うことで収束を証明することができる。$s(1)$ がどのような具体的な値に収束するかは現時点ではわからないが、次のように「定義」をする。

円周率の定義

円周率 π を次のように定義する。

$$\pi = 2s(1) = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

これは積分の値ではなく、「円周率の定義」である。この節では、「円周率は円周と直径の比である」なんて大それた発言をしないのである。長さとは何か？円とは何か？そんなものは考えなくてもいい。ただ単に円周率はとある定積分の結果として出て来るとある定数に過ぎないのだ。

また、少し計算すればすぐ分かることだが $s(x)$ は奇関数であるため $s(-1) = -s(1) = -\pi/2$ が成立する。よって s の値域は $J = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ である。ここで、単調増加性から s が単射であることが分かる。具体的には $s(a) = s(b)$ なる $a < b$ が存在するならば、平均値の定理より $s'(c) = 0$ となる $a < c < b$ が存在するため単調性と矛盾するのである。また、s は連続関数であるため中間値の定理から s が全射であることが分かる。$s(x)$ が連続であるかについては微分積分学の基本定理より可微分であるため、そこから連続であるとわかる。

よって、$s: I \to J$ は全単射であるため、ようやく逆関数を定義することができる。

三角関数 $\sin x$ の定義（一部区間のみ）

$x \in J$ について、$\sin x = s^{-1}(x)$ であると定義する。

残念ながらこの定義は不完全である。本来三角関数は任意の実数について定義されている必要がある。よってこの定義を「拡張」する作業に入る。もちろん、この拡張は実際の三角関数と同じようになることを目標とするべきであるので、次のように定義する。

三角関数 $\sin x$ の定義（任意実数への拡張）

$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ について、まずは $\sin x = \sin(\pi - x)$ であるように定義を拡張する。
次に、次に任意の 0 でない整数 n について、$\sin(x + 2n\pi), x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ を、$\sin(x + 2n\pi) = \sin x$ となるように定義を拡張する。

ついでに $\cos x$ も定義したいところであるが、これは慎重にやらなくてはいけない。なぜならば定義の仕方によっては加法定理を証明するときに循環論法に陥ってしまうからである。これから示すべきであることは三角関数の加法定理と極限の公式であるが、極限の式は $\cos(x)$ を定義しなくても証明できるので先に示してしまおう。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{s(t)} \\ &= 1/\lim_{t\to 0}\frac{s(t)}{t}\end{aligned}$$

よって $\lim_{x\to 0}\frac{s(x)}{x} = 1$ を示すことができたら十分である。これははさみうちの原理で示すことができる。また、左側極限だけ示すことができたら十分である。なぜならば $s(x)$ は奇関数であるため、冒頭での証明と同じように $t = -x$ として考えれば終わるからである。よってここでは左側極限だけを示す。また、以降の不等式において、x は $0 < x \leqq 1$ を満たしているとする。

$$\frac{s(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leqq \frac{1}{x}\cdot x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{s(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \geqq \frac{1}{x}\int_0^x dt = \frac{1}{x}x = 1$$

よって次の不等式が $0 < x \leqq 1$ 上で成立する。

$$1 \leqq \frac{s(x)}{x} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

よってはさみうちの原理で $x \to +0$ の極限では $\frac{s(x)}{x} \to 1$ となることが示された（証明終）

この証明では円の面積どころか、幾何学的な要素は全く考えていないため、循環論法には陥っていないだろう。これこそが極限公式における循環論法の 1 つの解決手段である。

さて次にやるべきことは加法定理を示すことであるが、そのためには先程言ったように $\cos(x)$ の定義をしなくてはいけない。$\cos(x)$ は $\sin(x)$ をずらしたものとするとか、$\sin(x)$ の導関数とするなどいろいろな定義方法が思い浮かぶが、今回の証明方法では以下のように定義する。

$\cos(x)$ の定義

$\cos(x)$ を次のように定義する。

- $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}, (x \in J)$
- $\cos(x) = -\cos(\pi - x), ((x+\pi) \in J)$
- $\cos(x) = \cos(x + 2n\pi), (\text{otherwise})$

ところで、加法定理を示したいと思っていたのだが、一旦 $\cos(x)$ に関する基本的な等式が成り立つことを示してしまおう。示すべきことは、以下のリストの公式群である。ただし、x, y は $0 \leqq x \leqq \pi/2, 0 \leqq y \leqq 1$ の範囲内にあるものとする。

- $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

循環論法を避けるためにも、「今までに出たもの」だけを用いて証明しよう。

ここでは逆関数の微分公式 $\dfrac{df^{-1}(x)}{dx} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ を使用する。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x) &= \frac{d}{dx}s^{-1}(x) = \frac{1}{1/\sqrt{1-\sin^2 x}} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos(x) \\
\frac{d}{dx}\cos(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right) = \left(\frac{d}{dx}\sin x\right)\cdot\frac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-\sin x) = -\sin x \\
\frac{d}{dy}\left(\cos^{-1} y\right) &= \frac{1}{-\sin\left(\cos^{-1} y\right)}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$\cos x = y, \sqrt{1-\sin^2 x} = y, \sin x = \sqrt{1-y^2}, x = s(\sqrt{1-y^2})$$

より

$$\cos^{-1}(y) = s(\sqrt{1-y^2})$$

であるので、

$$\frac{d}{dy}\left(\cos^{-1} y\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

よって、微分積分学の基本定理より、ある定数 $a \in [0,1]$ が存在して、

$$\cos^{-1} y = \int_y^a \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

となることがわかった。次に a を特定するのだが、$\cos^{-1} a = 0$ より、$a = \cos 0 = \sqrt{1-\sin^2 0} = 1(\sin 0 = 0)$ より、次の等式が成立する。

$$\cos^{-1}(y) = \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

よって、$s(x)$ の定義と合わせることで、

$$\sin^{-1} y + \cos^{-1} y = \frac{\pi}{2}$$

となることがわかった。よって、$x = \sin^{-1}(y)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\cos^{-1} y &= \frac{\pi}{2} - x \\
\cos\left(\cos^{-1} y\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
y &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
\sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)
\end{aligned}
$$

よって $0 \leqq x \leqq \pi/2$ の場合に成り立つことが分かった。

こうして、無事に幾つかの基本公式を示すことができたのでようやく加法定理の証明に移ることができるようになった。(一応言っておくと $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ は定義より明らか)

加法定理の証明に移ろう。ただこのような $\sin(x), \cos(x)$ の定義をしてしまうと、定義域の問題より最初に変数の範囲を制限しなければいけない。よって最初は変数の範囲を制限した後、三角関数の定義の公式を使って拡張するという手法を行う。ここでは、$x = \sin\alpha, y = \sin\beta$ というように変数を置くが、$0 \leqq \alpha, \beta \leqq \pi/2, 0 \leqq \alpha + \beta \leqq \pi/2$ という制限を最初に行

う。そのようにした場合、常に $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ が $s(x)$ の値域に存在するようになって、変な場合分けを考えなくてもいいようになる。ところで、今示すべきことは、以下の二つの等式である。

今から示すべきこと

$0 \leqq \alpha, \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq \alpha+\beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 α, β について、次の定理が成立する。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$\sin(x)$ についての加法定理は、両辺に $s(x)$ を合成することで、

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= s(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\\ s(x)+s(y) &= s(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

となる。このようなことになるのは、α, β の範囲から $\cos\alpha, \cos\beta$ が非負であることから従う。証明の方針は、

$$f(x,y) = s(x)+s(y)-s(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

とおいて、$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0, \dfrac{\partial f}{\partial y}=0, f(0,0)=0$ を示すことである。そうすれば x, y が変化しても f が変化しないことから、f は定数関数であることがわかり、さらに $f(0,0)$ の値からその定数がいくつかを特定することができる。微分積分学の基本定理 (微分と積分が逆の演算であること) から、$\dfrac{ds(x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であるので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial s(x)}{\partial x} + \frac{\partial s(y)}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 0 - \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}y\right) s'\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(\sqrt{1-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}-xy}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}-xy\right)^2}}\end{aligned}$$

また、3 行目から 4 行目の二項目のルートの中の式変形では、ブラマグプタ・フィボナッチ恒等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad-bc)^2 + (ac+bd)^2$$

を使用している。また、ルートの中に何かの二乗があるが、仮に $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy>0$ ならば、絶対値を消去できるので、まずはこの不等式を示しておこう。

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy \geqq 0 \Leftrightarrow (1-x^2)(1-y^2) \geqq x^2y^2 \Leftrightarrow 1-x^2-y^2 \geqq 0$$

であるから、

$$1-x^2-y^2 = 1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta = 1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos^2\beta \geqq 1-\sin^2\beta-\cos^2\beta = 0$$

よって二乗の中が正であることがわかったので絶対値を消去することができて、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}-xy}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}-xy}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&= 0\end{aligned}$$

この式は x, y について対称式であるため、同じような計算によって $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ であることもわかる。また、あきらかに $f(0,0)=s(0)+s(0)-s(0)=0$ であるため、$f(x,y)$ は恒等的に 0 となるため、正弦関数における加法定理が成立することが示された。

余弦関数については、正弦の結果を使うと簡単に示すことができる。$\alpha+\beta \leqq \pi/2$ より、$\cos(\alpha+\beta) \geqq 0$ であるので、

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)} \\
&= \sqrt{1-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2} \\
&= \sqrt{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2} \\
&= |\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta|
\end{aligned}$$

よって、

$$\cos\alpha\cos\beta \geqq \sin\alpha\sin\beta$$

が成立することが示せたら十分である。

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \geqq 0 \\
&\Leftrightarrow \cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta \geqq 0 \\
&\Leftrightarrow (1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)-\sin^2\alpha\sin^2\beta \geqq 0 \\
&\Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta \leqq 1
\end{aligned}$$

だが、$\alpha+\beta \leqq \pi/2$ であるから、

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta = \sin^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \leqq \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$$

より成り立つ。よって $0 \leqq \alpha, \beta$,$\alpha+\beta \leqq \pi/2$ において不等式

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \geqq 0$$

が成立するため、晴れて $\cos(x)$ の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

が成立することが示された。

さて、ここまれ来ればあと一息である。これらの等式が任意の実数 α, β で成立することが示すことで、加法定理の証明が完了する。よって今から「拡張」の作業に入ろう。

まずは $0 \leqq \alpha, \beta \leqq \pi/2, \pi/2 \leqq \alpha+\beta \leqq \pi$ で成立することを示そう。このとき、$0 \leqq \pi-(\alpha+\beta) \leqq \pi/2, 0 \leqq \pi/2-\alpha, \pi/2-\beta \leqq \pi/2$ であるので、

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\pi-\alpha-\beta) \\
&= \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \\
&= \cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= -\cos(\pi-\alpha-\beta) \\
&= -\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right) \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \\
&= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

よって加法定理が成立する範囲は $0 \leqq \alpha, \beta \leqq \pi/2$ の範囲にまで拡張された。次に $-\pi/2 \leqq \alpha, \beta \leqq \pi/2$ まで拡張することを目標としよう。以下では $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \pi/2$ であり、$\beta-\alpha \geqq 0$ であるので、

$$\begin{aligned}
\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha+\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha = \sin\beta \\
\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha-\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha = \cos\beta
\end{aligned}$$

よって連立方程式

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\beta-\alpha) \\ \cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}$$

の $\sin(\beta-\alpha), \cos(\beta-\alpha)$ についての解を求めればいいということになる。この $\sin\alpha, \cos\alpha$ についての行列の行列式は $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1 \neq 0$ であるため、この連立方程式にはただひとつの解が存在している。また、

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sin(\beta-\alpha) \\ \cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\
\sin((-\alpha)+\beta) &= \sin(-\alpha)\cos\beta + \cos(-\alpha)\sin\beta \\
\cos((-\alpha)+\beta) &= \cos(-\alpha)\cos\beta - \sin(-\alpha)\sin\beta
\end{aligned}$$

また、$0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \pi/2$ であるとき、

$$\begin{aligned}
\sin((-\alpha)+(-\beta)) &= -\sin(\alpha+\beta) \\
&= -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
&= \sin(-\alpha)\cos(-\beta) - \cos(-\alpha)\sin(-\beta) \\
\cos((-\alpha)+(-\beta)) &= \cos(\alpha+\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
&= \cos(-\alpha)\cos(-\beta) - \sin(-\alpha)\sin(-\beta) \\
\sin(\alpha-\beta) &= -\sin(\beta-\alpha) \\
&= -\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha \\
&= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\
&= \sin\alpha\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos\alpha \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\beta-\alpha) \\
&= \cos(-\alpha)\cos\beta + \sin(-\alpha)\sin\beta \\
&= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\alpha)
\end{aligned}$$

よって、加法定理が成立する範囲を $-\pi/2 \leqq \alpha, \beta \leqq \pi/2$ まで拡張することができた。つぎは $-\pi/2 \leqq \alpha, \beta \leqq 3\pi/2$ まで拡張することを目標とする。また、以下の証明は表記を簡単にするために、$-\pi/2 \leqq \alpha, \beta \leqq \pi/2$ としていて、$(\alpha, \beta+\pi), (\alpha+\pi, \beta+\pi)$ で等式が成立することを示せば十分である。また、式変形に等式 $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha, \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$ を使用しているが、これらの等式は三角関数の拡張の定義より示すことができる。

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+(\beta+\pi)) &= -\sin(\alpha+\beta) \\
&= -\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\
&= \sin\alpha\cos(\beta+\pi) + \sin(\beta+\pi)\cos\alpha \\
\cos(\alpha+(\beta+\pi)) &= -\cos(\alpha+\beta) \\
&= -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
&= \cos\alpha\cos(\beta+\pi) - \sin\alpha\sin(\beta+\pi) \\
\sin((\alpha+\pi)+(\beta+\pi)) &= \sin(\alpha+\beta+2\pi) \\
&= \sin(\alpha+\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
&= \sin(\alpha+\pi)\cos(\beta+\pi) + \cos(\alpha+\pi)\sin(\beta+\pi) \\
\cos((\alpha+\pi)+(\beta+\pi)) &= \cos(\alpha+\beta+2\pi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos(\alpha+\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
&= \cos(\alpha+\pi)\cos(\beta+\pi) - \sin(\alpha+\pi)\sin(\beta+\pi)
\end{aligned}
$$

よって加法定理が成立する範囲を $-\pi/2 \leqq \alpha, \beta \leqq 3\pi/2$ まで拡張することができた。次がようやく最終段階である。任意の実数 x, y に対して、整数 n, m と, $-\pi/2 \leqq \alpha\beta \leqq 3\pi/2$ となる実数 α, β が存在して、

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha + 2n\pi \\
y &= \beta + 2m\pi
\end{aligned}
$$

となるように値を取ることができる。よってこのとき、

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(\alpha+\beta+2(m+n)\pi) \\
&= \sin(\alpha+\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\
&= \sin(\alpha+2n\pi)\cos(\beta+2m\pi) + \sin(\beta+2m\pi)\cos\alpha+2n\pi \\
&= \sin x\cos y + \cos x\sin y \\
\cos(x+y) &= \cos(\alpha+\beta+2(m+n)\pi) \\
&= \cos(\alpha+\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
&= \cos(\alpha+2n\pi)\cos(\beta+2m\pi) - \sin(\alpha+2n\pi)\sin(\beta+2m\pi) \\
&= \cos x\cos y - \sin x\sin y
\end{aligned}
$$

よって任意の実数 x, y について、三角関数の加法定理が成立することが示された。

ところで、これで冒頭で示した 2 つの入試問題は解けたことになったのだが、追加でやっておきたいことがある。それは何かというと、

- $\sin(x), \cos(x)$ が無限回微分可能であることの証明
- 円周の長さが $2\pi r$ であることの証明
- 円の面積が πr^2 であることの証明

である。特に下二つは、この一連の証明では円周率を変な定義でしたため、もともと考えられた円周率というものと一致している必要があるのだ。

$\sin(x), \cos(x)$ は定義より明らかに連続関数であり、$(\sin(x))' = \cos(x), (\cos(x))' = -\sin(x)$ である。$\sin(x), \cos(x)$ は周期性を持つので、$x = \pi/2$ のときに導関数が連続になればいい。これは帰納法で示せる。1 回微分,2 回微分,3 回微分,4 回微分のときは簡単な計算で連続であることがわかり、あとは $\mod 4$ で循環するため何回微分しても連続性が保たれていることがわかる。

円周の長さについては、$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ の $-r \leqq x \leqq r$ の範囲で弧長積分を行えばいいので、

$$
\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\sqrt{r^2-x^2}\right)^2} &= \int_{-r}^{r} \frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}} \\
&= r\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \pi r
\end{aligned}
$$

よって円周の半分の長さが πr なので、円周の長さは $2\pi r$

円の面積については、普通に積分するだけである。まずは以下の等式

$$
2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}dx = \int_{-r}^{r} \frac{r^2dx}{\sqrt{r^2-x^2}}
$$

を示せばいいが、

$$
\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \left(2\sqrt{r^2-x^2} - \frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)dx &= \int_{-r}^{r} \frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}dx \\
&= \left[x\sqrt{r^2-x^2}\right]_{-r}^{r} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より従う。

5.2 別解 2 ～三角関数をべき級数として定義する～

次の別解に入る前に以下の事実が成り立つことを約束する。

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow {}^\forall\epsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, n \geqq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$
- $f(x)$ が $x = a$ で連続 $\Leftrightarrow {}^\forall\epsilon > 0, {}^\exists\delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$
- 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauthy 列であることを ${}^\forall\epsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, n, m \geqq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$ が成り立つことであると定義する。このとき、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauthy 列であることと、ある実数 α が存在して $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となることは同値である。(つまり、Cauthy 列と収束する数列は同じものとして扱って良いということ。)

これらは $\epsilon - \delta$ 論法・$\epsilon - N$ 論法と呼ばれていて、極限という「ぼんやりとしたもの」をきちんと定義し直したものである。別解においてもいろいろなことを定義したり証明したりすることになるだろうが、これだけは長々と証明を書くとキリがなくなってしまうので前提であるとしてほしい。$\epsilon - \delta$ 論法などについては後々ちゃんと説明した記事を書くことにする。

この解法では、テイラー展開を利用して三角関数を定義する。つまり、$\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ という感じに定義することになる。しかし、気をつけておきたいことが一つある。それは定義に矛盾がないかを確かめることである。三角関数は任意の実数に対して定義するのであるから、上記の級数が任意の実数 x に対して収束するかどうかを確かめる作業が必要となる。ところで今回はさらに強い性質である絶対収束するかどうかについて考えてみよう。

絶対収束の定義

> 級数 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ が収束するとき、級数 a_n は絶対収束するという。

絶対収束する級数は必ず収束するが、収束する級数は必ずしも絶対収束するとは限らない。たとえば、$a_n = (-1)^n/(n+1)$ とでもおくと、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \log 2$ となるが、$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \to \infty$ と発散してしまう。(詳細の説明は本筋から外れてしまうためここでは省略する。気になる人は、「メルカトル級数」や「ライプニッツ級数」でググってほしい。) ここで、$a_n = (-1)^n/(n+1)$ のように、収束はするが絶対収束はしない級数を条件収束するという。逆に絶対収束する数列の場合、三角不等式 $|x+y| \leqq |x|+|y|$ より、級数 S_n, T_n を、$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, T_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ とでもおけば、$|S_n - S_m| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k|$ という感じに書くことができる。ここで、a_k の絶対収束性を仮定すると、T_n が（収束することから）コーシー列になるため、十分大きな $N = N(\epsilon)$ を取ってきて $m > n > N$ となるような m, n を適当に取ってくると、

$$|T_m - T_n| < \epsilon$$

となる。よって S_n についても、

$$|S_n - S_m| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k|$$
$$|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$
$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |T_m - T_n|$$
$$|T_n - T_m| < \epsilon$$

となるため、S_n もコーシー列になるので、「絶対収束するならば収束」ということが言える。

さて、三角関数の定義にしようと思っている級数が絶対収束するかどうかについて考えてみよう。ここで、便宜上 $a_n = x^{2n+1}/(2n+1)!, b_n = x^{2n}/(2n)!$ とおく。このとき、

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x^2}{2n(2n+1)}$$
$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{x^2}{2n(2n-1)}$$

となっている。ここで、N を $2N+2>x$ となるように十分大きく取ると、(任意の実数に対して、このような実数 N が存在することは保証されている。) ある定数 $0<\lambda<1$ が存在して、$n>N$ のときに、

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqq \lambda$$
$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \leqq \lambda$$

が成立する。よってこのとき、

$$a_n \leqq a_N \lambda^{n-N}$$
$$b_n \leqq b_N \lambda^{n-N}$$

となる。よって、$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, T_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ については、ある正の定数 C_1, C_2 が存在して、$m>n>N$ のときに

$$\begin{aligned}
|S_m - S_n| &= |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} a_k \\
&\leqq \sum_{k=n+1}^{m} C_1 \lambda^k \\
&= C_1 \lambda^{n+1} \cdot \frac{1-\lambda^{m-n}}{1-\lambda} \\
&\leqq C_1 \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

が成立する。b_n についても同様の計算をすることで、

$$|T_m - T_n| \leqq C_2 \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$$

が成立する。n を十分大きくすると $|S_m - S_n|, |T_n - T_m|$ は 0 に収束するもので上から抑えることができるため、S_n, T_n がコーシー列であることが分かる。よって a_n, b_n は任意の実数 x に対して絶対収束して、有限の値になることがわかる。よってこれで $\sin(x), \cos(x)$ を定義することができる。

三角関数の定義

$\sin(x), \cos(x)$ を以下のように定義する。

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

さて、三角関数を無事定義することができたので、この定義において最初の定義を証明してみよう。それは $\sin(x), \cos(x)$ の導関数についての定義である。

三角関数の導関数についての定理

次の式が成立する。

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$
$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

これは一見自明に見える。なぜならば級数の各項を微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \cos(x) \\
\frac{d}{dx}\cos(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{d}{dx}1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2n)\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}
$$

というようにできるからだ。しかしここでは厳密性を追求していきたい。この計算過程では一見自明に見えても一般には成り立たない変形を使っている。それは「微分と極限の操作を交換しても良いのか」ということである。

成り立つ？

$\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を微分可能である関数の列（定義域は $I=[a,b]$）であるとする。このとき、任意の実数 $x \in I$ について $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が収束するとき、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv f(x)$ も微分可能であり、

$$
\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)
$$

が成り立つ。

上記の定理は一般には成り立たない。成り立たないことを証明するために反例を 1 個出してみよう。例えば、

$$
f_n(x) = x^n, x \in I = [0,1], (n=0,1,2,...)
$$

と定義すると、

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x=1) \\ 0 & (0 \leqq x < 1) \end{cases}
$$

となるため、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ とおくと、$x=1$ のときに $f(x)$ がそもそも連続ですら無いので $x=1$ では微分をすることができない。よって関数列の極限が微分可能であることを考えなくてはいけない。そのために、ここでは一様収束という概念を導入しよう。関数列 $f_n(x): I \to \mathbb{R}$ が収束するということは、

$$
{}^{\forall}x \in I, {}^{\forall}\epsilon > 0, {}^{\exists}N = N(x,\epsilon), \text{s.t.}, n \geqq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon
$$

というように定義されるが、一様収束の場合は少し違っていて

$$
{}^{\forall}\epsilon > 0, {}^{\exists}N = N(\epsilon), {}^{\forall}x \in I, \text{s.t.}, n \geqq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon
$$

となっている。慣れていないと違いを理解することができないが、N が x によって決まるかそうでないかの違いである。具体例として先程の $f_n(x) = x^n$ について考えてみると、($x = 0, 1$ のときはつねに $f_n(x) = f(x)$ となるので、$0 < x < 1$ の場合だけ考えればよい。)

$$
N > \log_x(\epsilon)
$$

となるように置いた場合、$n \geqq N$ の場合に、

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leqq x^N < x^{\log_x(\epsilon)} = \epsilon$$

となるため、収束することが分かる。一方、一様収束については N をどれほど大きくとっても、$0 < \epsilon + \lambda < 1$ となるような $\lambda > 0$ を取ってきて

$$x = (\epsilon + \lambda)^{1/N}$$

とした場合、（このとき $0 < x < 1$ となる）

$$|f_n(x) - f(x)| = x^N = \left((\epsilon + \lambda)^{1/N}\right)^N = \epsilon + \lambda > \epsilon$$

となってしまう。よって関数列 $f_n(x) = x^n$ は、$[0,1]$ 上で一様収束するが、収束しないということがわかった。

ところで、もし関数列が一様収束する場合、微分と極限の操作の入れ替えが可能だということが分かる。ここではこれを証明する。と、その前に連続でない場合微分可能であるはずがないので連続であることを示す。

示すこと 1(連続性の保存)

> 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は I 上に定義され、任意の n について $f_n(x)$ は I 上連続である。また、$\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が I 上で $f(x)$ に一様収束するとき、その収束後の関数 $f(x)$ も I 上連続である。

証明：$f_n(x)$ の連続性と一様収束性から、$N = N(\epsilon), \delta = \delta(n, \epsilon)$ が存在して、$n \geqq N$ を満たすときに、すべての $x, y \in I, |x - y| < \delta = \delta(n, \epsilon)$ について、

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$
$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$$

となる。よって、三角不等式より、

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leqq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< 3\epsilon\end{aligned}$$

よって定数倍の ϵ によって上から抑えることができるため、$f(x)$ が I 上連続であることが示された。さて、次は項別微分を示す前に、項別積分を示そう。

示すこと 2(項別積分)

> $f_n(x)$ は $I = [a, b]$ 上で $f(x)$ に一様収束する。このとき、
>
> $$\lim_{n \to \infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$$
>
> が成立する。

証明：一様収束性から $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ となる ϵ が x によらず存在するので、

$$\begin{aligned}|\int_I f_n(x)dx - \int_I f(x)dx| &= |\int_I f_n(x) - f(x)dx| \\ &\leqq \int_I |f_n(x) - f(x)|dx \\ &< \epsilon(b - a)\end{aligned}$$

よって示された。次は微分可能性の保存である。

示すこと 3(微分可能性の保存)

> 関数列 $f_n(x)$ は $I = [a, b]$ 上で定義され、全ての n について $f_n(x)$ は I 上 C^1 級であり、$f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束する。このとき、$f_n'(x)$ も I 上一様収束するならば
>
> $$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = f'(x)$$
>
> が成立する。

証明：$f'_n(x)$ の収束先の関数を $g(x)$ とおくと、項別積分ができるので、任意の $x \in I$ について

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f'_n(x)dx = \int_a^x g(x)dx$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_a^x f'_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(a)) \\ &= f(x) - f(a) \\ \lim_{n\to\infty}\int_a^x f'_n(x)dx &= f'(x) \\ \frac{d}{dx}\int_a^x g(x)dx &= g(x)\end{aligned}$$

より、$f'(x) = g(x)$ が成立する。(証明終)

最後に一様収束性を簡単に示す方法をいくつか紹介しよう。

Cauthy の一様収束定理

関数列 $f_n(x)$ が I 上で $f(x)$ で一様収束することと、次は同値である。

$$^\forall\epsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, {}^\forall x, n \geqq m \geqq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

証明：略（Cauthy 列と似たようなものを感じてくれ）

Weierstrass の優級数判定法

$f_n : I \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ を I 上で $\sum_{k=0}^n f_k(x)$ が $f(x)$ に各点収束する関数列とする。このとき、任意の n について、x によらず

$$|f_n(x)| \leqq M_n$$

となる実数列 M_n が存在して、さらに

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$$

を満たすとき、関数項級数 $\sum_{k=0}^n f_n(x)$ は I 上一様収束する。

証明:

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| &\leqq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \\ &\leqq M_{n+1} + \cdots + M_m \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

最後の不等式は $\sum_{k=0}^n M_k$ が Cauthy 列であることから従う。よって x に依らずに $|f_n(x) - f_m(x)|$ を上から抑えることができたので一様収束することが示された。

と、一通り一様収束性についての性質をいろいろ示すことができたので、これを先程定義した三角関数に適用してみよう。しかし $\sin(x), \cos(x)$ は残念なことに実数上では一様収束はしない。よって少し工夫が必要である。$\sin(x), \cos(x)$ は実数上では一様収束はしないが、実数上の任意の有界閉区間 $I = [a, b]$ 上では一様収束するのである。(これを広義一様収束という)

任意の実数 x に対して $x \in I = [a, b]$ を満たす I を持ってきた場合、関数列 $f_n, g_n : I \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, g_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

とおき、$c = \max_{x\in I}|x|$ とおくと、

$$|\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}| \leqq \frac{c^{2k+1}}{(2k+1)!}, |\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}| \leqq \frac{c^{2k}}{(2k)!}$$

となる。よって $f_n(x), g_n(x)$ それぞれについて、M_n を $\frac{c^{2k+1}}{(2k+1)!}, \frac{c^{2k}}{(2k)!}$ と定めれば、各項は c がついている定数 (x に依存していない) で抑えられて、その和はダランベールの判定法より収束することがわかるので Wierstrass の判定法により一様収束することが示される。

よって一様収束性が示せたため、項別微分で導関数を求めることができる。

三角関数の導関数を求めることができたので、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}\\ &= \cos(0)\\ &= 1\end{aligned}$$

級数として三角関数を定義した場合、三角関数の極限よりも先に導関数が求まるため、このような証明をすることができる。早速加法定理の証明に入ろう。

加法定理は級数どうしの積を考えるのだが、級数の積について考える方法はすでに確立されている。それが Cauchy 積である。

Cauchy 積

a_n, b_n を数列とし、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は絶対収束するとする。このとき、数列 c_n を、$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ とおくと、

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

が成立する。

証明：

$$\begin{aligned}|\left(\sum_{k=0}^{2N} c_k\right) - \left(\sum_{i=0}^{N} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} b_j\right)| &\leqq \left(\sum_{i=0}^{N} |a_i|\right)\left(\sum_{i=N+1}^{2N} |b_j|\right) + \left(\sum_{i=N+1}^{2N} |a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{N} |b_j|\right)\\ &\leqq A\epsilon + B\epsilon = (A+B)\epsilon\end{aligned}$$

よって等式が成立する。

この Cauthy 積を使用すると加法定理を証明することができる。（絶対収束性は先程示したため保証される。）

$$\begin{aligned}&\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(y)\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{(-1)^{n-k} y^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k} x^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2n-2k)!(2k+1)!}x^{2k+1}y^{2n-2k}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2n-2k)!(2k+1)!}x^{2n-2k}y^{2k+1}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{i=0}^{2n+1}{}_{2n+1}\mathrm{C}_i x^i y^{2n+1-i}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+y)^{2n+1}\right)\\ &= \sin(x+y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k} x^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k} x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(2n-2k)!(2k)!}x^{2n-2k}y^{2k}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+2)!}{(2n-2k+1)!(2k+1)!}x^{2n-2k+1}y^{2k+1}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{2k} x^{2n-2k} y^{2k}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\sum_{k=0}^{n} {}_{2n+2}\mathrm{C}_{2k+1} x^{2n-2k+1} y^{2k+1}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{2k} x^{2n-2k} y^{2k}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1} x^{2n-2k-1} y^{2k+1}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{i=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{i} x^{i} y^{2n-i}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+y)^n\right)\\
&= \cos(x+y)
\end{aligned}
$$

よって加法定理を示すことができた。（これらの式変形は任意の実数 x, y で成立するため、定義範囲の拡張をする必要がない。）

5.3　別解 3　～三角関数を微分方程式の解として定義する～

ここでは三角関数は微分方程式

$$y'' = -y$$

の解として定める。

$$\sin'' x = -\sin x, \sin 0 = 0, \sin' 0 = 1$$

$$\cos'' x = -\cos x, \cos 0 = 1, \cos' 0 = 0$$

詳しい証明は省くが、

$$f''(x) = -f(x)$$

という微分方程式の解となる関数空間は 2 次元のベクトル空間となっている。よって $f(0), f'(0)$ の元を指定したら答えは一意に定まる。よって上記の定義によって $\sin$ と $\cos$ は明確に定められたことになっている。このとき、$y'' + y = 0$ の解は

$$y = a\cos x + b\sin x, (a, b \in \mathbb{R})$$

という形で表されることに注意しよう。

この定義のもとで極限公式と加法定理を示そう。極限公式は簡単である。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h) - \sin 0}{h - 0} = \sin'(0) = 1$$

より示された。加法定理の前に $\sin$ の微分についても示そう。$\sin x$ は微分方程式の解なので

$$\sin'' x + \sin x = 0$$

両辺を微分することで

$$\sin''' x + \sin' x = 0$$

よって $\sin' x$ もこの微分方程式の解なのである。ここで、$\sin' 0 = 1, \sin'' 0 = -\sin 0 = 0$ であることから、

$$\sin' x = \cos x$$

となる。両辺を微分することによって

$$\cos' x = -\sin x$$

も示される。

ここから加法定理の証明に戻る。y を定数として x についての関数 $\sin(x+y)$ について考える。このとき

$$\sin''(x+y) = -\sin(x+y)$$

となってこれは微分方程式の解である。よって

$$\sin(x+y) = a\cos x + b\sin x$$

となる。ここで、$x=0$ のときに $\sin(0+y)=\sin y$ であって導関数の $x=0$ のときは $\cos(0+y)=\cos y$ であるため、

$$a=\sin y, b=\cos y$$

となる。よって

$$\sin(x+y)=\sin y\cos x+\sin x\cos y$$

となることが示された。ここで、

$$f(x,y)=\cos(x+y)-\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

とすると、

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=-\sin(x+y)+\sin x\cos y+\cos x\sin y=0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=-\sin(x+y)+\cos x\sin y+\sin x\cos y=0$$

となって、$f(0,0)=0$ であることから、$f(x,y)=0$ が恒等的に成り立つ、つまり加法定理が成り立つことが示された。

6　終わりに

と、このように加法定理の証明についていろいろ考察してみた。自分は高校数学の範囲で問題を解くとき、教科書に乗っていることは説明なしに使ってもよいこととして議論を進めたものだが、このように教科書レベルのことを証明するのはなかなか難しいものだった。そもそも三角関数という概念そのものが高校数学の範囲内でははっきりとした定義がなされていないためこのような問題が出てしまうとどうしても循環論法に陥ってしまうものである。高校数学でこの手の問題を出すのは狂気じみているのだ！これらの問題が作られたのは公式暗記に対しての警告という意味があるのかもしれないが、はっきり言って高校数学範囲内で解く方法は 1 つか、せいぜい 2 つしか思い浮かばなかった。もしかしたら警告をしている対象は受験生だけではなく、カリキュラム製作者にも向けているのだろうか？と思ったところで筆を置くことにする。

7 参考文献

- 微分積分 (共立講座 21 世紀の数学) 黒田成俊著
  ISBN:978-4320015531
- 1999 年の東京大学・2013 年の大阪大学の入試問題
- 三角関数の定義
  https://mathtrain.jp/sincostan
- ラグランジュの恒等式とその仲間 https://mathtrain.jp/identity
- テイラーの定理 - 金沢工業大学
  http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/category/suuretu/suuretu/henkan-tex.cgi?target=/math/category/suuretu/suuretu/taylor-teiri.html
- Mathematics and Its History 著者: John Stillwell
  https://books.google.co.jp/books?id=V7mxZqjs5yUC&pg=PA314&redir_esc=y&hl=ja#v=onepage&q&f=false
- コーシー積 - Wikipedia
  https://ja.wikipedia.org/wiki/コーシー積
- 関数項級数 (series of functions)
  http://next1.msi.sk.shibaura-it.ac.jp/MULTIMEDIA/calc/node38.html
- LaTeX の書き方にまつわるサイト色々