ガロア祭問4

しゃかやみ (@shakayami_)

平成 30 年 7 月 3 日

1 問題

1. 16 人で麻雀卓 4 つを使ってそれぞれ 5 回対戦して、総当たりになるようにできるか？
2. 一般に n^2 人で n 人対戦ゲームを $n+1$ 回して、総当たりにすることはできるか？
3. 問題が難しい場合は $n=3$ の場合を考えてみよ。

2 解答

2.1 解答の記法

$n \times n$ のマスから構成されるものに、それぞれ $0, \ldots, n-1$ の数字をそれぞれ n 個ずつ書く。たとえば $n=2$ のときは以下のような図となる。

表 1: $n=2$

0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0

上記の表において各 $n \times n$ 個のマスは一回ごとの対戦を表している。それぞれのマスに書いてある数字は卓につけられた番号を表していて、各対戦ごとに、マスに書かれている数字が同じ者同士がその回で対戦することになっている。つまり、マスの一行目に対応する人物を左から A,B, 二行目を左から右へ C,D を対応させるとき、

1. (A,C) と (B,D) に分かれて対戦する。
2. (A,B) と (C,D) に分かれて対戦する。
3. (A,D) と (B,C) に分かれて対戦する。

というような対戦表になっているということを上の表は表現しているということになっている。この表はは $n=2$ での総当たり戦が可能であることを示している。以降では、このような表を使って総当たり戦の可能の是非を議論していくことになる。

2.2 $n=3$ のとき

$n=3$ のときでは、可能である。実際に対戦表を構成すると、以下のようになる。

表 2: $n=3$

0	0	0	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	1	1	0	1	2	1	2	0	2	0	1
2	2	2	0	1	2	2	0	1	1	2	0

2.3 $n=4$ のとき

$n=4$ のときも可能である。実際に対戦表を構成すると以下のようになる。

表 3: $n=4$

0	0	0	0	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	1	1	1	0	1	2	3	1	0	3	2	3	2	1	0	2	3	0	1
2	2	2	2	0	1	2	3	2	3	0	1	1	0	3	2	3	2	1	0
3	3	3	3	0	1	2	3	3	2	1	0	2	3	0	1	1	0	3	2

3 一般の n について

$n=5,7,8$ での例をそれぞれ構築することが出来たので、その対戦表を次の表 4,5,6 に示す。

なお、$n=6$ については自分は構成することが出来なかったが、不可能であることの証明はできなかった。(自分は不可能であると予想している。)

ある人物が 1 回目で対戦する人数は $n-1$ 人で、$n+1$ 回対戦する場合、全体で対戦する人数はのべで $(n-1)(n+1)=n^2-1$ 人となる。よって正しい対戦表を構成できる場合、どのような 2 人をとってきても、その 2 人が実際に対戦する回数はちょうど 1 回でなくてはいけない。逆にどのような 2 人を

表 4: $n = 5$

0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1	1	1	1	1	1	2	3	4	0	3	4	0	1	2
2	2	2	2	2	2	3	4	0	1	1	2	3	4	0
3	3	3	3	3	3	4	0	1	2	4	0	1	2	3
4	4	4	4	4	4	0	1	2	3	2	3	4	0	1
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	4	0	1	2	3	2	3	4	0	1
0	1	2	3	4	3	4	0	1	2	4	0	1	2	3
0	1	2	3	4	2	3	4	0	1	1	2	3	4	0
0	1	2	3	4	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2

とってきても、その 2 人が実際に対戦する回数がちょうど 1 回であるとき、その対戦表は正しいということができる。

また、正解となるような構成から、特定の 2 人をすべての対戦表において置換したような配置も正解であるということができる。よって 1 つめの対戦表は i 行目 $(0 \leq i \leq n-1)$ が k であるような配置と決定づけても一般性は全く失われない。また、2 つめの対戦表は同じ行に同じ数字が出てきてはいけないため、j 列目 $(0 \leq j \leq n-1)$ を j とするようにしてよいということになる。以降の k 回目 $(3 \leq k \leq n+1)$ のそれぞれの対戦表は各行・各列ともに $0, \ldots, n-1$ の置換となっているのである。

また、以下の定理を示せたので証明する。

定理

位数 n の有限体が存在するとき、(つまり、$n = p^m$,(p は素数,m は自然数) と表されるとき）実際に対戦表を構成することができる。

n^2 人の人をそれぞれ添字 i, j を使って (i, j) とあらわす。ただし $0 \leq i, j \leq n-1$ である。また k 番目の対戦 $(0 \leq k \leq n)$ において (i, j) にあたる人が座る卓を $a_{i,j,k}$ とする。ただし $0 \leq a_{i,j,k} \leq n-1$ とする。n 回目の対戦においては、$a_{i,j,n} = i$ として、$0 \leq k \leq n-1$ なる k において、$a_{i,j,k} = ki + j$ とする。ただし、加法・乗法はともに位数 n の有限体 $\mathbb{F}_n$ で定義されている。

このような構成が実際に正しい対戦表であるかどうかを考える。適当に 2 人 $(a, b), (x, y)$ を取ってくる。このとき、k 番目の対戦ではそれぞれ $ka+b, kx+y$ の板に当たっている。これが等しい場合、$ka+b = kx+y \Leftrightarrow k(a-x) = (y-b)$ となる。$a = x$ の場合には n 回目の対戦だけで当たるため $a \neq x$ の場合を考えると、実際にその 2 人が同じ対戦をしているのは $k = (y-b)(a-x)^{-1}$ 回目ただ 1 回だけとなる。よって任意の二人が少なくとも 1 回は対戦しているため、実際に総当たり戦が構成されているということになる。よって正しい

表 5: $n = 7$

0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1	0	1	2	3	4	5	6	5	6	0	1	2	3	4
2	2	2	2	2	2	2	0	1	2	3	4	5	6	3	4	5	6	0	1	2
3	3	3	3	3	3	3	0	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	0
4	4	4	4	4	4	4	0	1	2	3	4	5	6	6	0	1	2	3	4	5
5	5	5	5	5	5	5	0	1	2	3	4	5	6	4	5	6	0	1	2	3
6	6	6	6	6	6	6	0	1	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	0	1
0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
6	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	0	3	4	5	6	0	1	2
5	6	0	1	2	3	4	2	3	4	5	6	0	1	6	0	1	2	3	4	5
4	5	6	0	1	2	3	3	4	5	6	0	1	2	2	3	4	5	6	0	1
3	4	5	6	0	1	2	4	5	6	0	1	2	3	5	6	0	1	2	3	4
2	3	4	5	6	0	1	5	6	0	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	0
1	2	3	4	5	6	0	6	0	1	2	3	4	5	4	5	6	0	1	2	3
0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6							
4	5	6	0	1	2	3	2	3	4	5	6	0	1							
1	2	3	4	5	6	0	4	5	6	0	1	2	3							
5	6	0	1	2	3	4	6	0	1	2	3	4	5							
2	3	4	5	6	0	1	1	2	3	4	5	6	0							
6	0	1	2	3	4	5	3	4	5	6	0	1	2							
3	4	5	6	0	1	2	5	6	0	1	2	3	4							

表 6: $n = 8$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	3	2	5	4	7	6	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	0	1	6	7	4	5	6	7	4	5	2	3	0	1
3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	0	7	6	5	4	5	4	7	6	1	0	3	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6	7	0	1	2	3	1	0	3	2	5	4	7	6
5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	7	6	1	0	3	2	2	3	0	1	6	7	4	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	4	5	2	3	0	1	7	6	5	4	3	2	1	0
7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	5	4	3	2	1	0	4	5	6	7	0	1	2	3
0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	6	7	2	3	0	1	6	7	4	5	4	5	6	7	0	1	2	3
0	1	2	3	4	5	6	7	4	5	6	7	0	1	2	3	5	4	7	6	1	0	3	2
0	1	2	3	4	5	6	7	6	7	4	5	2	3	0	1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	1	2	3	4	5	6	7	5	4	7	6	1	0	3	2	7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	7	6	5	4	3	2	1	0	3	2	1	0	7	6	5	4
0	1	2	3	4	5	6	7	1	0	3	2	5	4	7	6	2	3	0	1	6	7	4	5
0	1	2	3	4	5	6	7	3	2	1	0	7	6	5	4	6	7	4	5	2	3	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
5	4	7	6	1	0	3	2	6	7	4	5	2	3	0	1	7	6	5	4	3	2	1	0
7	6	5	4	3	2	1	0	1	0	3	2	5	4	7	6	3	2	1	0	7	6	5	4
2	3	0	1	6	7	4	5	7	6	5	4	3	2	1	0	4	5	6	7	0	1	2	3
3	2	1	0	7	6	5	4	2	3	0	1	6	7	4	5	6	7	4	5	2	3	0	1
6	7	4	5	2	3	0	1	4	5	6	7	0	1	2	3	1	0	3	2	5	4	7	6
4	5	6	7	0	1	2	3	3	2	1	0	7	6	5	4	5	4	7	6	1	0	3	2
1	0	3	2	5	4	7	6	5	4	7	6	1	0	3	2	2	3	0	1	6	7	4	5

対戦表が実際に構成できているため、定理を示すことが出来た。

この解答では $n=2,3,4,5,7,8$ での例で示すことが出来た。実際に 2,3,5,7 は素数であるし、4,8 は共に 2 の累乗であるため位数 n の有限体を構成することができる。$n=6$ の場合で「できなさそう」なのも位数 6 の有限体が存在しないからであるが、あくまでそれは十分条件であって必要条件ではない。$n=6$ の場合に実際に対戦表が構成できるかどうかなどの判定は今後の課題としたい。