ガロア祭問3

しゃかやみ (@shakayami_)

平成 30 年 7 月 3 日

1 問題

自然数 n の最大の素因子を $a(n)$ とするとき、

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{na(n)}$$

が収束することを示せ

2 解答

数列の各項は正なので条件収束することはなく、項の順番を入れ替えて考えても構わない。また、便宜上 $a(1) = 1$ と拡張した定義をする。

k 番目の素数を p_k というようにあらわす。$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ である。またここでは便宜上 $p_0 = 1$ としておく。このとき、

$$S_k = \{n \in \mathbb{N} | a(n) \leq p_k\}$$

とおいて、

$$\sum_{n \in S_k} \frac{1}{n}$$

が幾つになるのかを考える。ここで、任意の自然数 k について、$1 \in S_k$ である。

自然数 n が $a(n) \leq p_k$ を満たす場合、

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}, a_i \geq 0$$

という形で表すことができる。逆に $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ を定めたらそれに対応する $n \in S(k)$ が一意に定まる。よって、これは $\mathbb{N}^k$ から S_k への全単射であるため、以下のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in S_k} \frac{1}{n} &= \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1}
\end{aligned}$$

となる。ここで、$T_k = \{n \in \mathbb{N} | a(n) = p_k\}$ とおくと、

$$T_k = \begin{cases} S_k \setminus S_{k-1} & k \geq 2 \\ S_1 \setminus \{1\} & k = 1 \end{cases}$$

とあらわすことができる。よって、$k \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in T_k} \frac{1}{na(n)} &= \frac{1}{p_k} \left(\sum_{n \in S_k} \frac{1}{n} - \sum_{n \in S_{k-1}} \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{p_k} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1} - \prod_{i=1}^{k-1} \frac{p_i}{p_i - 1} \right) \\
&= \frac{1}{p_k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{p_i}{p_i - 1} \left(\frac{p_k}{p_k - 1} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{p_k} \frac{1}{p_k - 1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{p_i}{p_i - 1} \\
&= \frac{1}{p_k^2} \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1}
\end{aligned}$$

となる。また、$k = 1$ のときには、

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in T_1} \frac{1}{na(n)} &= \frac{1}{p_1} \left(\sum_{n \in S_2} \frac{1}{n} - \sum_{n \in \{1\}} \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{p_1} \left(\prod_{i=1}^{1} \frac{p_i}{p_i - 1} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{p_1 - 1} \\
&= \frac{1}{p_1^2} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1}
\end{aligned}$$

であるため、自然数 k について等式

$$\sum_{n \in T_k} \frac{1}{na(n)} = \frac{1}{p_k^2} \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1}$$

が成立することがわかった。

また、T_k は以下の性質

$$\begin{aligned}
i \neq j \quad &\Rightarrow \quad T_i \cap T_j = \emptyset \\
\cup_{k=1}^{\infty} T_k \quad &= \quad \mathbb{N} \setminus \{1\}
\end{aligned}$$

を満たすため、

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{na(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in T_k} \frac{1}{na(n)}$$

としてよい。よって、

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{na(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k^2}\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i}{p_i-1}$$

となる。ここで、

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i}{p_i-1}\sim e^{\gamma}\log\left(p_k\right)$$

が成立するため、(注：メルテンスの第3定理,γ はオイラー定数) ある定数 C をとってきて、

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i}{p_i-1}\leq C\log p_k$$

と置くことができる。よって、

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{na(n)} &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log(p_k)}{p_k^2}\\ &= C\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\frac{\log(n)}{n^2}\\ &\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^2}\end{aligned}$$

となる。ただし $f(n), f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ は、

$$f(n)=\begin{cases}1 & n\text{ is prime.}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

で定義される。

ここで、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}$ が収束することが示せたら十分である。

ある定数 A を取ってきて、不等式 $\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\leq A$ とおくことができる。よって、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^2} &\leq A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\\ &= A\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\\ &< \infty\end{aligned}$$

よって収束することが示された。