ガロア祭問1

しゃかやみ (@shakayami_)

平成 30 年 7 月 3 日

1 問題

順序を構成するやつ

2 解答

順序が同じということは $\forall a, b \in A, a \leq b \Rightarrow a \ll b$ が成立することであり、逆に順序が違うということは $\exists a, b \in A, a \leq b, b \ll a$ が成立することである。問題における順序の定義がどこまで普通の順序構造と一致しているかについて考察する。

まず公理で $0 \ll 1$ が定義されている。4 番目の性質により両辺に 1 を足すと $1 \ll 2$ が成り立っている。同様にして、$n \in \mathbb{Z}$ について、$0 \ll n$ であるとき、$n \ll n+1$ より $0 \ll n+1$ が成立する。マイナス方向についても同様であり、$n \ll 0$ ならば $n-1 \ll n \ll 0$ となるため、この順序は少なくとも自然数の範囲内では "普通の順序" とまったく同じ構造をしていることがわかる。現に、$a \leq b$ なる $a, b \in \mathbb{Z}$ については、$0 \ll b-a$ であるため、$a \ll b$ が導かれる。つまり A が整数の集合では自明な順序しか存在しないということがわかる。

有理数についても考えてみる。$r = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p > 0, q > 0$ について、$r > 0$ だが $r \ll 0$ であるものを考えてみる。$r \ll 0$ である場合、性質 4 より両辺に r を足しても順序は保存されるので $2r \ll r$ であるため、$2r \ll 0$ が導かれる。整数での場合と同様にして帰納的に考えると一般に $b < a, a, b \in \mathbb{Z}$ について、$br \gg ar$ が成立する。しかしこのとき、$a = p, b = 0$ とおくと、$0 \gg q$ となり、整数の範囲内で順序が保存しないため矛盾する。よって $r > 0, r \in \mathbb{Q}$ ならば $r \gg 0$ でなくてはいけない。つまり有理数の範囲内ではこの順序は "普通の順序" とまったく同じ構造をしていることがわかった。

もし現在構成しようとしている順序が自明な順序と異なる場合、$a < b$ かつ $a \gg b$ となるような場合が存在するということになる。これを $b - a = x$ とおいて整理すると、$0 < x$ かつ $0 \gg x$ となる x が存在するという命題と同値に

なる。このような x が存在した場合、帰納的な議論により $\cdots 2x \ll x \ll 0 \ll -x \ll -2x \ll \cdots$ が成立することがわかる。また、これまでの議論で x は無理数でなくてはいけないということがわかった。ある無理数について、$r \in A$ とした場合、A は加法について閉じているので、$\{x+yr|x,y \in \mathbb{Z}\} \subset A$ となることがわかる。ここで、無理数 $r>0$ について、$A=\{a+rb|a,b \in \mathbb{Q}\}$ と定義して、そこでの順序関係を以下のように定める。

順序

関数 $f: A \to A$ を以下のように定義する。
$a+rb \in A$ について、$f(a+rb)=a-rb$
このとき、$a+rb, c+rd \in A$ について順序関係を、
$a+rb \ll c+rd \Leftrightarrow f(a+rb) < f(c+rd)$
で定義する。

この性質がまず well-defined であることを示す。$a,b,c,d \in \mathbb{Q}$ が $a+rb = c+rd$ を満たしている場合、$a=c, b=d$ を満たしている。もし $b \neq d$ ならば $r=\frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$ となるため矛盾している。よって $b=d$ だがこのとき $a=c$ となる。よって A の元は $(a,b) \in \mathbb{Q}$ と一対一対応している。よって a,b のとり方によって $f(a+rb)$ の値が異なるようなことはない。

そして、このようにして示された順序関係は、もとの順序関係とは異なっている。現に $r>0$ だが、$f(r)=-r, f(0)=0$ より、$f(r)<f(0) \Rightarrow r \ll 0$ となっているため、自明でない順序関係であることがわかる。

そこで、この順序が 1 4 までの性質を満たしていることを示す。

まず $f(0)=0, f(1)=1$ より 1 は満たす。また、写像で移してから実数の順序について考察しているため、2,3 も明らかに成り立つと考えてもよい。最後に性質 4 についてだが、f の線形性を使う。

$$f(a+br)+f(c+dr)=a-br+c-dr=(a+c)-r(b+d)=f(a+br+c+dr)$$

となるため、$x,y \in A$ について $f(x+y)=f(x)+f(y)$ が成立する。

よって、

$$\begin{aligned} a &\ll b \\ \Rightarrow f(a) &< f(b) \\ \Rightarrow f(a)+f(c) &< f(b)+f(c) \\ \Rightarrow f(a+c) &< f(b+c) \\ \Rightarrow a+c &\ll b+c \end{aligned}$$

よって 4 番目の性質を満たすことがわかった。

さて、このように示した順序関係は実はアルキメデスの原理を満たしているのである。これを今から示す。

先程示した順序関係におけるアルキメデスの原理の命題文を書くと以下のようになる。

$$\forall a, b \in A, 0 \ll a, b, \exists n \in \mathbb{N}, b \ll na$$

ここで、$0 \ll a, b$ ならば、$f(a) > 0, f(b) > 0$ である。これに実数の普通の順序におけるアルキメデスの原理を適用させると、ある自然数 n が存在して、$f(b) < nf(a)$ となっている。ここで、f の線形性より $nf(a) = f(na)$ であるため、$f(b) < f(na)$ よってこのとき $b \ll na$ となっていることがわかる。

3　最後に

詳しくは検証していないのだが、有理数体上で線形独立な実数の組 $r_1, \ldots, r_n$ について、$A = \{a_0 + a_1 r_1 + \cdots a_n r_n | a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\}$ について、$f(a_0 + a_1 r_1 + \cdots a_n r_n) = a_0 - a_1 r_1 - \cdots - a_n r_n$ としたとき、$f(a) < f(b)$ のとき $a \ll b$ というように定義したらこれもまた非自明な順序関係になる。証明は $1, 2, 3$ は明らかであり (実数上での順序関係に帰着させているので)、性質 4 については同じように f の線形性などを用いて示すことになる。また、f も $r_1, \ldots, r_n$ の線形独立性によって well-defined であることがわかる。